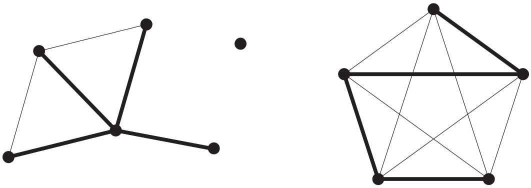

Abb. 0.4.1. Ein Graph mit drei Komponenten und Gerüst $(K^1 * \overline{K^4}) \cup K^1 \cup P^4$

Trenner

ist ein A–B-*Trenner*; insbesondere gilt dann $A \cap B \subseteq X$. Die Menge X *trennt* zwei Ecken a, b, falls sie die Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$ trennt und $a, b \notin X$ ist. Allgemeiner *trennt* X den Graphen G, wenn X zwei Ecken in G trennt. Eine Ecke, die zwei andere Ecken der gleichen Komponente trennt, heißt *Artikulation*. Eine Kante heißt *Brücke*, wenn sie ihre Endecken trennt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

Artikulation

Brücke

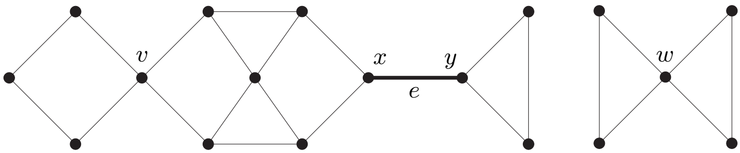

Abb. 0.4.2. Ein Graph mit Artikulationen v, w, x, y und Brücke $e = xy$

Teilung

Das ungeordnete Paar $\{A, B\}$ heißt *Teilung* von G mit den *Seiten* A und B, wenn $A \cup B = V$ ist und G keine Kante zwischen $A \smallsetminus B$ und $B \smallsetminus A$ hat. Letzteres ist offensichtlich äquivalent zu der Aussage, dass A von B durch $A \cap B$ getrennt wird. Wenn weder $A \smallsetminus B$ noch $B \smallsetminus A$ leer ist, heißt die Teilung *echt*. Die Zahl $|A \cap B|$ ist die *Ordnung* der Teilung $\{A, B\}$.

k-zusammenhängend

G heißt *k-zusammenhängend* (für $k \in \mathbb{N}$), wenn $|G| > k$ gilt und $G - X$ für jede Eckenmenge $X \subseteq V$ der Mächtigkeit $< k$ zusammenhängend ist, also keine zwei Ecken von G durch weniger als k andere Ecken getrennt werden.

Jeder nicht leere Graph ist somit 0-zusammenhängend, und die 1-zusammenhängenden Graphen sind gerade die nicht trivialen zusammenhängenden Graphen. Die größte natürliche Zahl k, für die G k-zusammenhängend ist, ist der *Zusammenhang* $\kappa(G)$ von G. Insbesondere ist $\kappa(G) = 0$ genau dann, wenn G nicht zusammenhängend oder ein K^1 ist, und es gilt $\kappa(K^n) = n - 1$ für alle $n \geqslant 1$.

$\kappa(G)$

ℓ-kanten-zusammenhängend

Ist $|G| > 1$, so heißt G *ℓ-kantenzusammenhängend*, wenn $G - F$ für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ der Mächtigkeit $< \ell$ zusammenhängend ist. Das größte $\ell \in \mathbb{N}$, für das G ℓ-kantenzusammenhängend ist, ist der

Ein normaler Baum T in G kann ein mächtiges Hilfsmittel sein, um die Trennungseigenschaften von G zu beschreiben:

Lemma 0.5.5. *Sei T ein normaler Baum in G.*

(i) *Je zwei Ecken $x, y \in T$ werden in G durch die Menge $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil$ getrennt.*

(ii) *Ist $S \subseteq V(T) = V(G)$ nach unten abgeschlossen, so werden die Komponenten von $G - S$ von den Mengen $\lfloor x \rfloor$ aufgespannt, für die x in $T - S$ minimal ist.*

Beweis. (i) Es sei P ein beliebiger x–y-Weg in G; wir zeigen, dass P die Menge $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil$ trifft. Dazu betrachten wir eine minimale Folge $t_1, \dots, t_n$ in $V(P \cap T)$ mit der Eigenschaft, dass $t_1 = x$ und $t_n = y$ ist und t_i und t_{i+1} in der Baumordnung von T für alle i vergleichbar sind. (Solch eine Folge existiert: die Folge *aller* Ecken von P in $V(T)$ etwa erfüllt diese Bedingungen, da T normal ist und jedes Segment $t_i P t_{i+1}$ entweder eine Kante von T oder ein T-Weg ist.) In unserer minimalen Folge kann es nun nicht passieren, dass $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ gilt für irgendein i: dann wären t_{i-1} und t_{i+1} vergleichbar, und durch Löschen von t_i erhielten wir eine kleinere solche Folge. Es gibt also ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$x = t_1 > \ldots > t_k < \ldots < t_n = y \,.$$

Da t_k in $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil \cap V(P)$ liegt, folgt die Behauptung.

(ii) Betrachten wir eine Komponente C von $G - S$, und in $V(C)$ ein minimales Element x. Dann gibt es in $V(C)$ kein weiteres minimales Element x': da x und x' unvergleichbar wären, enthielte nach (i) jeder x–x'-Weg in C eine Ecke unter beiden, im Widerspruch zu ihrer Minimalität in $V(C)$. Da jede Ecke von C über irgendeinem minimalen Element von $V(C)$ liegt, liegt sie damit über x. Umgekehrt liegt aber auch jede Ecke $y \in \lfloor x \rfloor$ in C: da S nach unten abgeschlossen ist, liegt der aufsteigende Weg xTy ja ganz in $T - S$. Somit gilt $V(C) = \lfloor x \rfloor$.

Wir zeigen nun, dass x minimal nicht nur in $V(C)$ sondern in ganz $T - S$ ist. Die Ecken unterhalb von x bilden eine Kette $\lceil t \rceil$ in T. Da t zu x benachbart ist, folgt aus der Maximalität von C als Komponente von $G - S$, dass t in S liegt. Da S nach unten abgeschlossen ist, gilt dann auch $\lceil t \rceil \subseteq S$. Damit haben wir bewiesen, dass jede Komponente von $G - S$ die behauptete Form hat.

Ist umgekehrt x irgendein minimales Element von $T - S$, so ist x natürlich auch minimal in der Komponente C von $G - S$, die es enthält. Wie oben folgt $C = \lfloor x \rfloor$. □

Normale Spannbäume werden in der Informatik meist *Tiefensuchbäume* genannt, weil man sie durch ein bestimmtes Suchverfahren auf

9.$^+$ Zeige, dass jeder zusammenhängende Graph G einen Weg der Länge $\min\{2\delta(G), |G|-1\}$ enthält.

10. Zeige, dass ein zusammenhängender Graph mit Durchmesser k und Minimalgrad d mindestens etwa $kd/3$ Ecken hat, aber nicht notwendig wesentlich mehr.

11.$^-$ Zeige, dass die Eckenmengen der Komponenten eines Graphen eine Partition seiner gesamten Eckenmenge bilden. (Mit anderen Worten: jede Ecke ist in genau einer Komponente enthalten.)

12.$^-$ Zeige, dass jeder 2-zusammenhängende Graph einen Kreis enthält.

13. Bestimme κ und λ für P^m, C^n, K^n, $K_{m,n}$ und den n-dimensionalen Würfel (siehe Übung 2), $m, n \geqslant 3$.

14.$^-$ Gibt es eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass Graphen mit Minimalgrad mindestens $f(k)$ stets k-zusammenhängend sind?

15.$^+$ Es seien α, β zwei Grapheninvarianten mit Werten in $\mathbb{N}$. Formalisiere die folgenden beiden Aussagen und zeige dann, dass sie äquivalent sind:

(i) β ist nach oben durch eine Funktion in α beschränkt;

(ii) wir können beliebig große Werte von α allein dadurch erzwingen, dass wir β groß genug machen.

Zeige, dass die Aussage

(iii) α ist nach unten durch eine Funktion in β beschränkt

nicht äquivalent zu (i) und (ii) ist. Durch welche kleine Änderung wird (iii) äquivalent zu (i) und (ii)?

16.$^+$ Zeige, dass jeder Graph mit Minimalgrad $2k$ einen $(k+1)$-kantenzusammenhängenden Untergraphen hat, für jedes $k \in \mathbb{N}$.

17. Betrachte den Beweis von Satz 0.4.3. Wäre es nicht natürlicher, statt der zweiten Annahme in $(*)$ vorauszusetzen, dass $\varepsilon(G') > \gamma - k$ sei, wie im Satz für H gefordert?

(i) Untersuche, wie diese Änderung sich auf den Beweis auswirken würde: welche Teile gingen auch damit durch, welche wären anzupassen, und welche gingen schief?

(ii) Erläutere, wie eine Annahme der Form $m \geqslant c_k n - b_k$ statt $m \geqslant c_k n$ hilft, den Widerspruch in den letzten Ungleichungen des Beweises herbeizuführen.

18.$^+$ (Fortsetzung von 16–17.) Finde die kleinste ganze Zahl $b = b(k)$, für die jeder Graph mit n Ecken und mehr als $kn + b$ Kanten einen $(k+1)$-kantenzusammenhängenden Teilgraphen hat, für alle $k \in \mathbb{N}$.

19. Beweise Satz 0.5.1.

20.$^-$ Zeige, dass ein Baum T mindestens $\Delta(T)$ Blätter hat.

21. Finde zwei ganz kurze Beweise, dass ein Baum ohne Ecken vom Grad 2 mehr Blätter als andere Ecken hat: einen mit Induktion, den anderen ohne.

unter anderem die Listenversion des Satzes von Brooks; einen kürzeren Beweis geben A.V. Kostochka, M. Stiebitz und B. Wirth, The colour theorems of Brooks and Gallai extended, *Discrete Math.* **162** (1996) 299–303. Voigt (1993) konstruierte einen ebenen Graphen mit 238 Ecken, der nicht 4-listenfärbbar ist; Thomassens Listenversion des Fünffarbensatzes ist somit bestmöglich.

Sowohl die Listenfärbungsvermutung als auch Galvins Beweis des bipartiten Falls gelten allgemeiner für Multigraphen. Unser Beweis von Satz 4.4.4 folgt Galvins Originalarbeit; eine etwas kompaktere Fassung, in der die gerichteten Kantengraphen und ihre Kerne nicht explizit auftreten sondern in das Hauptargument integriert sind, gibt Slivnik in *Comb. Probab. Comput.* **5** (1996), 91–94.

Einen Überblick über Resultate, Techniken und offene Probleme aus dem Bereich der Listenfärbungen gibt N. Alon, Restricted colorings of graphs, in (K. Walker, Hrsg.): *Surveys in Combinatorics*, LMS Lecture Notes **187**, Cambridge University Press 1993. Dort findet sich auch ein Beweis von Satz 4.4.1. Kahn (1994) zeigte, dass die Listenfärbungsvermutung asymptotisch richtig ist: für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\mathrm{ch}'(G) \leqslant (1+\epsilon)\Delta(G)$ für alle Graphen G mit hinreichend großem $\Delta(G)$.

Die Totalfärbungsvermutung (Übung **32**) wurde um 1965 unabhängig von Vizing und Behzad aufgestellt; siehe Jensen & Toft.

Eine leicht lesbare Einführung in perfekte Graphen samt Anwendungen gibt M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press 1980. Eine umfassendere Behandlung gibt A. Schrijver, *Combinatorial optimization*, Springer 2003. Übersichtsartikel zu unterschiedlichen Aspekten perfekter Graphen finden sich in *Perfect Graphs* von J. Ramirez-Alfonsin & B. Reed (eds.), Wiley 2001. Unser erster Beweis von Satz 4.5.4 folgt Lovász‘s Übersichtsartikel in L.W. Beineke & R.J. Wilson (Hrsg.), *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983. Unser zweiter Beweis, der Beweis des Satzes 4.5.6, ist von G.S. Gasparian, Minimal imperfect graphs: a simple approach, *Combinatorica* **16** (1996), 209–212. Satz 4.5.3 wurde von Chudnovsky, Robertson, Seymour und Thomas bewiesen, The strong perfect graph theorem, *Ann. Math.* **164** (2006), 51–229, arXiv:math/0212070. Eine leichter zugängliche Übersicht über den Beweis gibt N. Trotignon in arXiv:1301.5149. Chudnovsky, Cornuejols, Liu, Seymour und Vušković, Recognizing Berge graphs, *Combinatorica* **25** (2005), 143–186, entwarfen einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n^9)$, der den Inputgraphen auf die Existenz von ungeraden „Löchern“ (ungeraden Kreise der Länge $\geqslant 5$) und ungeraden „Antilöchern“ (Komplemente von Löchern) als Untergraphen testet, und nach Satz 4.5.3 damit auf Perfektion.

Die Vermutung von Gýarfás über χ-Beschränktheit, die Pate stand für Satz 4.5.7, ist aus A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, Proceedings of the International Conference on Combinatorial Analysis and its Applications (Pokrzywna, 1985), *Zastos. Mat.* **19** (1987), 413–441. Teil (i) des Satzes ist von A. Scott and P.D. Seymour, arXiv:1410.4118, Teil (ii) von diesen Autoren zusammen mit M. Chudnovsky, arXiv:1506.02232. Ein hiermit zusammenhängendes interessantes Problem ist die *Erdős-Hajnal-Vermutung*, dass die Graphen G, die einen beliebigen festen Graphen H nicht als Untergraphen enthalten, ~~linear große~~ Mengen paarweise benachbarter oder paarweise nicht benachbarter Ecken enthalten müssen. Siehe auch Kapitel 7.1.

Und wie der folgende Beweis zeigt, reichen $s = 2r - 3$ Ecken v_i aus, um unter ihnen in der Tat die Ecken eines K^r oder $\overline{K^r}$ in G zu finden.

Satz 7.1.1. (Ramsey 1930) [7.2.2]
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph mit mindestens n Ecken einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ als Untergraphen enthält.

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $r = 0, 1$; im Folgenden sei $r \geqslant 2$. Es sei $n := 2^{2r-3}$, und G ein Graph mit mindestens n Ecken. Wir definieren rekursiv Eckenmengen $V_1, \dots, V_{2r-2}$ und Ecken $v_i \in V_i$ in G mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ $(i = 1, \dots, 2r-2)$;

(ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ $(i = 2, \dots, 2r-2)$;

(iii) v_{i-1} ist entweder zu jeder oder zu keiner Ecke in V_i benachbart $(i = 2, \dots, 2r-2)$.

Es sei $V_1 \subseteq V(G)$ irgendeine Menge von 2^{2r-3} Ecken, und $v_1 \in V_1$ beliebig. Damit ist (i) für $i = 1$ erfüllt; (ii) und (iii) sind trivialerweise wahr. Zu gegebenem i mit $1 < i \leqslant 2r-2$ seien nun V_{i-1} und $v_{i-1} \in V_{i-1}$ bereits so gewählt, dass (i)–(iii) für $i-1$ gelten. Da

$$|V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$$

ungerade ist, hat V_{i-1} eine Teilmenge V_i, die (i)–(iii) erfüllt; wir wählen $v_i \in V_i$ beliebig.

Unter den $2r-3$ Ecken $v_1, \dots, v_{2r-3}$ gibt es $r-1$ Ecken, die als v_{i-1} in (iii) vom gleichen Typ sind: entweder jeweils zu allen Ecken in V_i benachbart oder zu keiner. Da V_i die Ecken $v_i, \dots, v_{2r-2}$ enthält, induzieren diese $r-1$ Ecken zusammen mit v_{2r-2} entsprechend einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ in G. □

Die kleinste zu r gehörige Zahl n aus Satz 7.1.1 nennt man die *Ramseyzahl von r*; nach unserem Beweis des Satzes ist $n \leqslant 2^{2r-3}$. In Kapitel 9 werden wir auch eine untere Schranke für die Ramseyzahl von r finden (Satz 9.1.3). *Ramsey-zahl von r*

Die größte Mächtigkeit einer Clique oder stabilen Eckenmenge, die ein Graph der Ordnung n enthalten muss, ist asymptotisch also lediglich logarithmisch in n. Sobald wir jedoch irgendeinen festen Graphen als Untergraphen verbieten, könnte sie viel größer sein, ~~vielleicht sogar linear in n:~~ die *Erdős-Hajnal-Vermutung* besagt, dass es zu jedem Graphen H eine Konstante $\delta_H > 0$ gibt, so dass jeder H nicht als Untergraphen enthaltende Graph G eine Menge von mindestens $|G|^{\delta_H}$ Ecken enthält, die alle benachbart oder alle nicht benachbart sind.