

Abb. 0.4.1. Ein Graph mit drei Komponenten und Gerüst
 $(K^1 * K^4) \cup K^1 \cup P^4$

Trenner ist ein A - B -Trenner; insbesondere gilt dann $A \cap B \subseteq X$. Die Menge X trennt zwei Ecken a, b , falls sie die Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$ trennt und $a, b \notin X$ ist. Allgemeiner trennt X den Graphen G , wenn X zwei Ecken in G trennt. Eine Ecke, die zwei andere Ecken der gleichen Komponente trennt, heißt **Artikulation**. Eine Kante heißt **Brücke**, wenn sie ihre Endecken trennt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

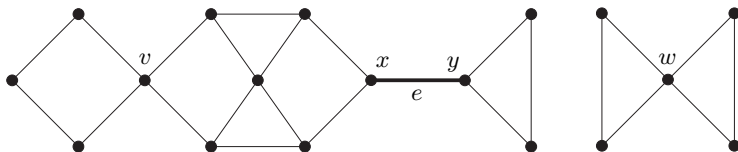


Abb. 0.4.2. Ein Graph mit Artikulationen v, w, x, y und
 Brücke $e = xy$

Teilung Das ungeordnete Paar $\{A, B\}$ heißt *Teilung* von G mit den *Seiten* A und B , wenn $A \cup B = V$ ist und G keine Kante zwischen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ hat. Letzteres ist offensichtlich äquivalent zu der Aussage, dass A von B durch $A \cap B$ getrennt wird. Wenn weder $A \setminus B$ noch $B \setminus A$ leer ist, heißt die Teilung *echt*. Die Zahl $|A \cap B|$ ist die *Ordnung* der Teilung $\{A, B\}$.

**k -
zusammen-
hängend**

G heißt k -zusammenhängend (für $k \in \mathbb{N}$), wenn $|G| > k$ gilt und $G - X$ für jede Eckenmenge $X \subseteq V$ der Mächtigkeit $< k$ zusammenhängend ist, also keine zwei Ecken von G durch weniger als k andere Ecken getrennt werden.

$\kappa(G)$

Jeder nicht leere Graph ist somit 0-zusammenhängend, und die 1-zusammenhängenden Graphen sind gerade die nicht trivialen zusammenhängenden Graphen. Die größte natürliche Zahl k , für die G k -zusammenhängend ist, ist der *Zusammenhang* $\kappa(G)$ von G . Insbesondere ist $\kappa(G) = 0$ genau dann, wenn G nicht zusammenhängend oder ein K^1 ist, und es gilt $\kappa(K^n) = n - 1$ für alle $n \geq 1$.

**ℓ -kanten-
zusammen-
hängend**

Ist $|G| > 1$, so heißt G ℓ -kantenzusammenhängend, wenn $G - F$ für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ der Mächtigkeit $< \ell$ zusammenhängend ist. Das größte $\ell \in \mathbb{N}$, für das G ℓ -kantenzusammenhängend ist, ist der

Ein normaler Baum T in G kann ein mächtiges Hilfsmittel sein, um die Trennungseigenschaften von G zu beschreiben:

Lemma 0.5.5. *Sei T ein normaler Baum in G .*

- (i) **Je zwei Ecken** $x, y \in T$ werden in G durch die Menge $[x] \cap [y]$ getrennt.
- (ii) Ist $S \subseteq V(T) = V(G)$ nach unten abgeschlossen, so werden die Komponenten von $G - S$ von den Mengen $[x]$ aufgespannt, für die x in $T - S$ minimal ist.

Beweis. (i) Es sei P ein beliebiger x - y -Weg in G ; wir zeigen, dass P die Menge $[x] \cap [y]$ trifft. Dazu betrachten wir eine minimale Folge t_1, \dots, t_n in $V(P \cap T)$ mit der Eigenschaft, dass $t_1 = x$ und $t_n = y$ ist und t_i und t_{i+1} in der Baumordnung von T für alle i vergleichbar sind. (Solch eine Folge existiert: die Folge *aller* Ecken von P in $V(T)$ etwa erfüllt diese Bedingungen, da T normal ist und jedes Segment $t_i P t_{i+1}$ entweder eine Kante von T oder ein T -Weg ist.) In unserer minimalen Folge kann es nun nicht passieren, dass $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ gilt für irgendein i : dann wären t_{i-1} und t_{i+1} vergleichbar, und durch Löschen von t_i erhielten wir eine kleinere solche Folge. Es gibt also ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$x = t_1 > \dots > t_k < \dots < t_n = y.$$

Da t_k in $[x] \cap [y] \cap V(P)$ liegt, folgt die Behauptung.

(ii) Betrachten wir eine Komponente C von $G - S$, und in $V(C)$ ein minimales Element x . Dann gibt es in $V(C)$ kein weiteres minimales Element x' : da x und x' unvergleichbar wären, enthielte nach (i) jeder x - x' -Weg in C eine Ecke unter beiden, im Widerspruch zu ihrer Minimalität in $V(C)$. Da jede Ecke von C über irgendeinem minimalen Element von $V(C)$ liegt, liegt sie damit über x . Umgekehrt liegt aber auch jede Ecke $y \in [x]$ in C : da S nach unten abgeschlossen ist, liegt der aufsteigende Weg xTy ja ganz in $T - S$. Somit gilt $V(C) = [x]$.

Wir zeigen nun, dass x minimal nicht nur in $V(C)$ sondern in ganz $T - S$ ist. Die Ecken unterhalb von x bilden eine Kette $[t]$ in T . Da t zu x benachbart ist, folgt aus der Maximalität von C als Komponente von $G - S$, dass t in S liegt. Da S nach unten abgeschlossen ist, gilt dann auch $[t] \subseteq S$. Damit haben wir bewiesen, dass jede Komponente von $G - S$ die behauptete Form hat.

Ist umgekehrt x irgendein minimales Element von $T - S$, so ist x natürlich auch minimal in der Komponente C von $G - S$, die es enthält. Wie oben folgt $C = [x]$. \square

Normale Spannbäume werden in der Informatik meist *Tiefensuchbäume* genannt, weil man sie durch ein bestimmtes Suchverfahren auf

- 9.⁺ Zeige, dass jeder zusammenhängende Graph G einen Weg der Länge $\min\{2\delta(G), |G| - 1\}$ enthält.
10. Zeige, dass ein zusammenhängender Graph mit Durchmesser k und Minimalgrad d mindestens etwa $kd/3$ Ecken hat, aber nicht notwendig wesentlich mehr.
- 11.⁻ Zeige, dass die Eckenmengen der Komponenten eines Graphen eine Partition seiner gesamten Eckenmenge bilden. (Mit anderen Worten: jede Ecke ist in genau einer Komponente enthalten.)
- 12.⁻ Zeige, dass jeder 2-zusammenhängende Graph einen Kreis enthält.
13. Bestimme κ und λ für P^m , C^n , K^n , $K_{m,n}$ und den n -dimensionalen Würfel (siehe Übung 2), $m, n \geq 3$.
- 14.⁻ Gibt es eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass Graphen mit Minimalgrad mindestens $f(k)$ stets k -zusammenhängend sind?
- 15.⁺ Es seien α, β zwei Grapheninvarianten mit Werten in \mathbb{N} . Formalisiere die folgenden beiden Aussagen und zeige dann, dass sie äquivalent sind:
- β ist nach oben durch eine Funktion in α beschränkt;
 - wir können beliebig große Werte von α allein dadurch erzwingen, dass wir β groß genug machen.

Zeige, dass die Aussage

- (iii) α ist nach unten durch eine Funktion in β beschränkt

nicht äquivalent zu (i) und (ii) ist. Durch welche kleine Änderung wird (iii) äquivalent zu (i) und (ii)?

- 16.⁺ Zeige, dass jeder Graph mit Minimalgrad $2k$ einen $(k+1)$ -kantenzusammenhängenden Untergraphen hat, für jedes $k \in \mathbb{N}$.
17. Betrachte den Beweis von Satz 0.4.3. Wäre es nicht natürlicher, statt der zweiten Annahme in (*) vorauszusetzen, dass $\varepsilon(G') > \gamma - k$ sei, wie im Satz für H gefordert?
- Untersuche, wie diese Änderung sich auf den Beweis auswirken würde: welche Teile gingen auch damit durch, welche wären anzupassen, und welche gingen schief?
 - Erläutere, wie eine Annahme der Form $m \geq c_k n - b_k$ statt $m \geq c_k n$ hilft, den Widerspruch in den letzten Ungleichungen des Beweises herbeizuführen.

- 18.⁺ (Fortsetzung von 16–17.) Finde die kleinste ganze Zahl $b = b(k)$, für die jeder Graph mit n Ecken und mehr als $kn + b$ Kanten einen $(k+1)$ -kantenzusammenhängenden Teilgraphen hat, für alle $k \in \mathbb{N}$.

19. Beweise Satz 0.5.1.

20.⁻ Zeige, dass ein Baum T mindestens $\Delta(T)$ Blätter hat.

21. Finde zwei ganz kurze Beweise, dass ein Baum ohne Ecken vom Grad 2 mehr Blätter als andere Ecken hat: einen mit Induktion, den anderen ohne.

Proposition 4.2.2. Für jeden Graphen G gilt

$$\chi(G) \leq \text{col}(G) = \max \{ \delta(H) \mid H \subseteq G \} + 1.$$

□

Die Reihenzahl eines Graphen ist eng mit seiner Arborizität verknüpft; vergleiche dazu die Bemerkung nach Satz 1.4.3.

Proposition 4.2.2 zeigt, dass jeder k -chromatische Graph einen Teilgraphen vom Minimalgrad mindestens $k - 1$ hat. Dieser Teilgraph kann selbst k -chromatisch gewählt werden:

Lemma 4.2.3. Jeder k -chromatische Graph hat einen k -chromatischen Untergraphen mit Minimalgrad mindestens $k - 1$.

[6.3]

[7.2.1]

[7.2.3]

[9.2.3]

Beweis. Betrachte einen *kritisch* k -chromatischen Untergraphen H : einen solchen, den jede Löschung einer (weiteren) Ecke $\frac{2}{2}$ -färbbar macht. Hätte H eine Ecke v vom Grad $d(v) \leq k - 2$, so könnten wir eine $(k - 1)$ -Färbung von $H - v$ zu einer $(k - 1)$ -Färbung von H ergänzen, mit Widerspruch zur Wahl von H . □

Wir sahen eingangs, dass für jeden Graphen G die Abschätzung $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ gilt, mit Gleichheit für vollständige Graphen und Kreise ungerader Länge. Der folgende Satz zeigt, dass in allen anderen Fällen die Abschätzung ein wenig verbessert werden kann:

Satz 4.2.4. (Brooks 1941)

Es sei G ein zusammenhängender Graph. Ist G weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge, so gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|G|$. Ist $\Delta(G) \leq 2$, so ist G ein Weg oder Kreis, und die Behauptung ist trivial. Es gelte daher $\Delta := \Delta(G) \geq 3$, und die Behauptung sei wahr für Graphen kleinerer Ordnung als $|G|$. Angenommen, $\chi(G) > \Delta$. □

Es sei $v \in G$ eine beliebige Ecke und $H := G - v$. Dann ist $\chi(H) \leq \Delta$: für jede Komponente H' von H gilt nämlich nach Induktionsannahme $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta$, sofern H' nicht vollständig oder ein ungerader Kreis ist; in jenem Fall ist jedoch $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leq \Delta$, da jede Ecke von H' maximalen Grad hat und eine dieser Ecken in G zusätzlich zu v benachbart ist. Δ
 v, H

Da G nach Annahme nicht mit Δ Farben färbbar ist, gilt:

Jede Δ -Färbung von H verwendet alle Farben $1, \dots, \Delta$ auf den Nachbarn von v ; insbesondere ist $d(v) = \Delta$. (1)

Wann immer wir eine Δ -Färbung von H betrachten, bezeichnen wir den mit der Farbe i gefärbten Nachbarn von v als v_i , sowie mit $H_{i,j}$ den Untergraphen von H , den die Ecken mit den Farben i und j aufspannen. v_1, \dots, v_Δ
 $H_{i,j}$

unter anderem die Listenversion des Satzes von Brooks; einen kürzeren Beweis geben A.V. Kostochka, M. Stiebitz und B. Wirth, The colour theorems of Brooks and Gallai extended, *Discrete Math.* **162** (1996) 299–303. Voigt (1993) konstruierte einen ebenen Graphen mit 238 Ecken, der nicht 4-listenfärbbar ist; Thomassens Listenversion des Fünffarbensatzes ist somit bestmöglich.

Sowohl die Listenfärbungsvermutung als auch Galvins Beweis des bipartiten Falls gelten allgemeiner für Multigraphen. Unser Beweis von Satz 4.4.4 folgt Galvins Originalarbeit; eine etwas kompaktere Fassung, in der die gerichteten Kantengraphen und ihre Kerne nicht explizit auftreten sondern in das Hauptargument integriert sind, gibt Slivnik in *Comb. Probab. Comput.* **5** (1996), 91–94.

Einen Überblick über Resultate, Techniken und offene Probleme aus dem Bereich der Listenfärbungen gibt N. Alon, Restricted colorings of graphs, in (K. Walker, Hrsg.): *Surveys in Combinatorics*, LMS Lecture Notes **187**, Cambridge University Press 1993. Dort findet sich auch ein Beweis von Satz 4.4.1. Kahn (1994) zeigte, dass die Listenfärbungsvermutung asymptotisch richtig ist: für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\text{ch}'(G) \leq (1 + \epsilon)\Delta(G)$ für alle Graphen G mit hinreichend großem $\Delta(G)$.

Die Totalfärbungsvermutung (Übung 32) wurde um 1965 unabhängig von Vizing und Behzad aufgestellt; siehe Jensen & Toft.

Eine leicht lesbare Einführung in perfekte Graphen samt Anwendungen gibt M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press 1980. Eine umfassendere Behandlung gibt A. Schrijver, *Combinatorial optimization*, Springer 2003. Übersichtsartikel zu unterschiedlichen Aspekten perfekter Graphen finden sich in *Perfect Graphs* von J. Ramirez-Alfonso & B. Reed (eds.), Wiley 2001. Unser erster Beweis von Satz 4.5.4 folgt Lovász's Übersichtsartikel in L.W. Beineke & R.J. Wilson (Hrsg.), *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983. Unser zweiter Beweis, der Beweis des Satzes 4.5.6, ist von G.S. Gasparian, Minimal imperfect graphs: a simple approach, *Combinatorica* **16** (1996), 209–212. Satz 4.5.3 wurde von Chudnovsky, Robertson, Seymour und Thomas bewiesen, The strong perfect graph theorem, *Ann. Math.* **164** (2006), 51–229, arXiv:math/0212070. Eine leichter zugängliche Übersicht über den Beweis gibt N. Trotignon in arXiv:1301.5149. Chudnovsky, Cornuejols, Liu, Seymour und Vušković, Recognizing Berge graphs, *Combinatorica* **25** (2005), 143–186, entwarfen einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n^9)$, der den Inputgraphen auf die Existenz von ungeraden „Löchern“ (ungeraden Kreise der Länge ≥ 5) und ungeraden „Antilöchern“ (Komplemente von Löchern) als Untergraphen testet, und nach Satz 4.5.3 damit auf Perfektion.

Die Vermutung von Gyárfás über χ -Beschränktheit, die Pate stand für Satz 4.5.7, ist aus A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, Proceedings of the International Conference on Combinatorial Analysis and its Applications (Pokrzywna, 1985), *Zastos. Mat.* **19** (1987), 413–441. Teil (i) des Satzes ist von A. Scott and P.D. Seymour, arXiv:1410.4118, Teil (ii) von diesen Autoren zusammen mit M. Chudnovsky, arXiv:1506.02232. Ein hiermit zusammenhängendes interessantes Problem ist die *Erdős-Hajnal-Vermutung*, dass die Graphen G , die einen beliebigen festen Graphen H nicht als Untergraphen enthalten, linear große Mengen paarweise benachbarter oder paarweise nicht benachbarter Ecken enthalten müssen. Siehe auch Kapitel 7.1.

Und wie der folgende Beweis zeigt, reichen $s = 2r - 3$ Ecken v_i aus, um unter ihnen in der Tat die Ecken eines K^r oder $\overline{K^r}$ in G zu finden.

Satz 7.1.1. (Ramsey 1930)

[7.2.2]

Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph mit mindestens n Ecken einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ als Untergraphen enthält.

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $r = 0, 1$; im Folgenden sei $r \geq 2$. Es sei $n := 2^{2r-3}$, und G ein Graph mit mindestens n Ecken. Wir definieren rekursiv Eckenmengen V_1, \dots, V_{2r-2} und Ecken $v_i \in V_i$ in G mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ ($i = 1, \dots, 2r-2$);
- (ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ ($i = 2, \dots, 2r-2$);
- (iii) v_{i-1} ist entweder zu jeder oder zu keiner Ecke in V_i benachbart ($i = 2, \dots, 2r-2$).

Es sei $V_1 \subseteq V(G)$ irgendeine Menge von 2^{2r-3} Ecken, und $v_1 \in V_1$ beliebig. Damit ist (i) für $i = 1$ erfüllt; (ii) und (iii) sind trivialerweise wahr. Zu gegebenem i mit $1 < i \leq 2r-2$ seien nun V_{i-1} und $v_{i-1} \in V_{i-1}$ bereits so gewählt, dass (i)–(iii) für $i-1$ gelten. Da

$$|V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$$

ungerade ist, hat V_{i-1} eine Teilmenge V_i , die (i)–(iii) erfüllt; wir wählen $v_i \in V_i$ beliebig.

Unter den $2r-3$ Ecken v_1, \dots, v_{2r-3} gibt es $r-1$ Ecken, die als v_{i-1} in (iii) vom gleichen Typ sind: entweder jeweils zu allen Ecken in V_i benachbart oder zu keiner. Da V_i die Ecken v_i, \dots, v_{2r-2} enthält, induzieren diese $r-1$ Ecken zusammen mit v_{2r-2} entsprechend einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ in G . \square

Die kleinste zu r gehörige Zahl n aus Satz 7.1.1 nennt man die *Ramseyzahl von r* ; nach unserem Beweis des Satzes ist $n \leq 2^{2r-3}$. In Kapitel 9 werden wir auch eine untere Schranke für die Ramseyzahl von r finden (Satz 9.1.3).

*Ramsey-
zahl von r*

Die größte Mächtigkeit einer Clique oder stabilen Eckenmenge, die ein Graph der Ordnung n enthalten muss, ist asymptotisch also lediglich logarithmisch in n . Sobald wir jedoch irgendeinen festen Graphen als Untergraphen verbieten, könnte sie viel größer sein, ~~vielleicht sogar linear in n~~ : die *Erdős-Hajnal-Vermutung* besagt, dass es zu jedem Graphen H eine Konstante $\delta_H > 0$ gibt, so dass jeder H nicht als Untergraphen enthaltende Graph G eine Menge von mindestens $|G|^{\delta_H}$ Ecken enthält, die alle benachbart oder alle nicht benachbart sind.

die in R' zu allen Ecken aus $\varphi(U)$ benachbart ist aber zu keiner anderen Ecke aus dem (endlichen) Bild von φ , und die auch selbst nicht im Bild von φ liegt. Wir setzen $\varphi(v) := v'$.

Bei jedem geraden Schritt des Definitionsprozesses gehen wir analog vor mit vertauschten Rollen für R und R' : wir betrachten die erste Ecke v' in der Aufzählung von V' , die noch nicht im Bild von φ liegt, und setzen $\varphi(v) = v'$ für eine neue Ecke v , die unter den Ecken, für die φ (bzw. φ^{-1}) bereits definiert wurde, die gleichen Nachbarn und Nicht-Nachbarn hat wie v' .

Da wir v und v' jeweils minimal wählen, wird die Bijektion auf ganz V und ganz V' definiert, und offensichtlich ist sie ein Isomorphismus.

(ii) Für je zwei feste disjunkte, endliche Mengen $U, W \subseteq \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ecke $v \notin U \cup W$ nicht wie in \mathcal{P}_∞ mit $U \cup W$ verbunden ist (zu jeder Ecke in U aber zu keiner in W), eine Zahl $r < 1$, die nur von U und W abhängt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von k Ecken $v \notin U \cup W$ keine wie in \mathcal{P}_∞ zu $U \cup W$ benachbart ist, ist dann r^k , was für $k \rightarrow \infty$ gegen null geht. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine der unendlich vielen Ecken außerhalb von $U \cup W$ die Bedingung \mathcal{P}_∞ für diese Mengen U und W erfüllt, gleich null.

Nun gibt es aber nur abzählbar viele Wahlen endlicher Eckenmengen U und W . Da die Vereinigung abzählbar vieler Teilmengen von $\mathcal{G}(\mathbb{N}_0, p)$ mit Maß null wiederum das Maß null hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass \mathcal{P}_∞ für *irgendwelche* Mengen U und W fehlschlägt, immer noch null. Somit hat $G \in \mathcal{G}(\mathbb{N}_0, p)$ die Eigenschaft \mathcal{P}_∞ mit Wahrscheinlichkeit 1. Zusammen mit (i) bedeutet dies, dass fast sicher $G \simeq R$ gilt. \square

Wie können wir uns das Paradox erklären, dass das Ergebnis unendlich vieler unabhängiger Einzelwahlen von Kanten dermaßen vorhersehbar ist? Die Antwort liegt natürlich darin, dass die Eindeutigkeit von R nur bis auf Isomorphie gilt. Einen Automorphismus für einen unendlichen Graphen mit der Eigenschaft \mathcal{P}_∞ zu konstruieren ist aber viel einfacher, als einen Automorphismus eines endlichen Zufallsgraphen zu finden. So betrachtet drückt Satz 9.3.5 nicht einen Mangel an Vielfalt unendlicher Zufallsgraphen aus, sondern vielmehr das hohe Maß an Symmetrie, die diese Vielfalt verwischt, wenn man die Graphen $G \in \mathcal{G}(\mathbb{N}_0, p)$ nur bis auf Isomorphie betrachtet.

9.4 Schwellenfunktionen und zweite Momente

Die Aussagen über fast alle Graphen, die wir in Abschnitt 9.3 kennenlernten, haben einen vielleicht unerwarteten Aspekt gemeinsam: der vorausgesetzte Wert von p spielte in keinem dieser Sätze eine Rolle. Hatte also fast jeder Graph in $\mathcal{G}(n; 0,99)$ eine der betrachteten Eigenschaften, so auch **jeder** Graph in $\mathcal{G}(n; 0,01)$.