TULUN

图　论（第四版）

Graph Theory

Fourth Edition

□ [德] Reinhard Diestel　著

□ 于青林　王　涛　王光辉　译

前　言

今天所用的图论入门课程的大部分内容, 都依赖于几本教科书的出版, 到现在这些教科书几乎都有二十年了。这些书所形成的标准有助于我们决定哪些是学习和研究的主要领域, 毫无疑问地这会在未来若干时间内继续影响这个分支的发展。

然而, 像数学其他分支一样, 图论在过去的二十年里有了长足的发展: 很多深刻新定理的发现; 表面上完全不同的方法和结果变得相互关联了; 崭新的分支出现了。这里, 只列举几个这样的发展: 列表着色这一新概念可以看成是图不变量如平均度和着色数之间的桥梁; 概率方法和正则性引理渗透到极值图论和 Ramsey 理论的各个方面; 图子式和树分解这一崭新领域给曲面拓扑带来了标准方法, 从而解决了长期存在的算法图论问题。

显然, 现在是重新评估的时候了: *当前, 组成初等图论课程核心的基本领域、方法和结果是什么样, 才能满足读者对未来可能发展的需要?*

在这本书中, 我尝试着为这样的课程提供材料。考虑到渐增的复杂性和学科的成熟程度, 我背离了尝试同时包含理论和应用的传统: 这本书作为 (纯) 数学的一部分, 来介绍图论的入门知识, 它既不包含显式算法也不包括 “现实世界” 中的应用。我希望内容的限制可以被可能的深度所弥补, 使得计算机学科的学生也可以和他们的数学同仁一样受益: 即使计算机学科的学生更喜欢算法, 但也可以从与某种数学的偶遇中受益, 这也许是一个他们实现心愿的理想机会。

在选择和组织材料时, 我尝试容纳两个冲突的目标。一方面, 我相信初等教材应该精炼并把重点放在基础上, 从而给这个领域的初学者指明方向。进一步地, 作为研究生教材, 它应该尽快地触及问题的中心: 终究, 我们的想法是让读者对这个学科的方法和深度至少有个印象。另一方面, 我特别关切, 应提供足够多的细节使得书读起来令人愉快并容易: 指导性问题和想法会进行明确地讨论, 所有呈现的证明都是完整的和严格的。

所以, 通常, 每章一开始, 我们简单地讨论所涉及领域的方向性问题, 然后简略地回顾这方面的经典结果 (经常包括一些简化的证明), 其后呈现一个或两个深刻的定理, 从而把这个领域的整体感觉带出来。在这些定理的证明之前, 我们首先 (或者散置其中) 对主要思想给出非正式的叙述, 然后提供正式的证明, 给出和简单定理一样多的细节。我很快注意到, 和它们所用到的简单而漂亮的概念相比, 某些证明写出来会很长。然而, 我希望即使对专业的读者来说, 给这

些证明提供相对多的细节至少可以节省些阅读时间 ……

如果愿意, 这本教材只需很少甚至不需任何准备就可作为讲稿, 最简单的方法是一章一章地遵循书中的顺序进行讲授: 除了两处明确标注的地方外, 任何证明中用到的结果都在书的前面提到。

另外, 讲课者也许希望把内容分成两部分, 一部分作为一学期的简单初等课程, 另一部分作为紧接的挑战性课程。按照内容的顺序, 为了帮助备课, 在每个证明的页边空白处附近, 我们列出了证明中所用到的结果的参考标号。这些参考在圆括号中给出, 例如, 定理 4.3.2 的证明旁边注明着参考号 (4.1.2), 表明引理 4.1.2 用在这个证明中。对应地, 在引理 4.1.2 的旁边有一个参考号 [4.3.2] (用方括号), 告诉读者这个引理用在定理 4.3.2 的证明中。注意到, 这个系统只用于不同的小节之间 (在同一章或不同章)。各节作为独立的单元存在, 最好是遵照书中的顺序阅读它们。

和大部分图论教材一样, 这本书需要的数学准备是很少的: 在 1.9 节以及 5.5 节中, 我们需要最基本的线性代数知识; 在第四章, 我们需要一些有关欧氏平面和 3-空间的基础拓扑概念; 读者以前学习初等概率的经历会对学习第十一章有帮助 (即使那里, 我们也只假定有关基本定义的知识, 而所用的少数概率工具在书中也有所介绍)。我认为图论中有两个方向既充满魅力又非常重要, 尤其是从纯数学角度看, 但我们没能在本书中包括: 它们是代数图论和无限图。

在每一章的最后, 我们给出练习以及关于参考文献和历史注释的一节。很多练习的选择是基于对教材的主要论述的补充: 它们诠释新的概念, 揭示新的不变量如何与前面不变量关联, 或者揭示如何证明书中某个结果是最好的方法。特别容易的练习用 “$^-$” 标明, 而更具挑战性的练习用 “$^+$” 表示。注解是为了引导读者作进一步的阅读, 特别是指出与该章主题有关的专著或综述文章, 同时也对书中所包含的内容, 提供某些历史的或其他方面的解释。

证明的结束用符号 “□” 表示。当这个符号紧跟着一个正式叙述的命题出现时, 意味着从已经讨论的事实看, 它的证明应该是显然的, 但有待读者去检验。有些深刻定理, 我们只叙述它但没有给出证明, 它们是作为背景资料出现的, 这些定理不难识别, 因为它既没有证明也没有 “□”。

几乎每一本书都会有错误, 这本书也很难例外。我会在网上张贴有必要做出更正的地方, 相关的网站随着时间可能改变, 但总可以通过下面两个网址访问:

`http://www.springer-ny.com/supplements/diestel/`

`http://www.springer.de/catalog/html-files/deutsch/math/3540609180.html`

请把你发现的任何错误告知我。

任何教科书中, 只有很小部分是真正原创的: 即使写作方式和表达方式也

不可避免地受到别的书的影响。对我影响最大的书, 毫无疑问的是由 Bollobás 撰写的经典 GTM[1] 图论教科书, 它是我作为学生首次学习图论时所用的书。虽然内容和表达不一样, 但熟悉那本书的人都可以感受到它的影响。

我希望感谢所有对本书慷慨地贡献了时间、知识和忠告的人们, 他们的帮助使我受益匪浅, 尤其是 N. Alon, G. Brightwell, R. Gillett, R. Halin, M. Hintz, A. Huck, I. Leader, T. Łuczak, W. Mader, V. Rödl, A. D. Scott, P. D. Seymour, G. Simonyi, M. Škoviera, R. Thomas, C. Thomassen 和 P. Valtr。我要特别感谢 Tommy R. Jensen, 他教给我很多关于着色的结果以及我所知道的所有 k-流的知识, 在校正本书的德文初版时, 他投入了巨大的精力和热情。

Reinhard Diestel
1997 年 3 月

---

[1] 译者注: GTM 指由 Springer 出版的系列研究生数学教科书.

关于第二版

自然地, 我十分高兴在这本书于 1997 年夏季出版后这么快就需要写这个补遗, 尤其是听到人们逐渐地使用本书, 不仅用于个人研究, 也越来越多地用作教材, 这使我深感欣慰, 因为这正是我当初写这本书的初衷, 否则我不会花如此多的时间来斟酌如何表达书中的内容。

第二版主要有两个变化: 在最后一章的图子式部分, 我们对 Robertson-Seymour 理论的一个主要结果给出了完整的证明。他们的定理指出: 一个图不包含给定图作为子式且具有有界树宽当且仅当这个给定图是可平面的。当我撰写第一版时, 这个简单的证明还不存在, 这是为什么我决定包括次好结果 (关于路宽的类似结果) 的简短证明, 现在我把这个次好结果从十二章中删除。这章的另一个新结果是树宽对偶定理, 即定理 12.3.9, 现在也有个简短证明。

第二个主要变化是给出了所有练习的提示, 这主要是 Tommy Jensen 的功劳, 我感谢他对这个项目所付出的时间。这些提示的目的是帮助本书的读者自学图论, 而不是剥夺解题的乐趣。练习和提示的目的都是为了课堂使用而设计的。

除了这两个变化外, 还增加了几个别的内容, 最容易注意到的是在 1.5 节我们正式地引进了层次优先搜索树 (这可以使得以后的某些证明简化) 和 Menger 定理新的独创性证明, 这个证明是由 Böhme, Göring 和 Harant 给出的 (现在还没有发表)。

最后, 当我用本书教学时, 注意到许多论证可以进行小的简化和澄清, 其中有些是由别人给我指出的, 在此我也表示特别的感谢。

本书的网址已经随我转到:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/`

我希望这个网址在将来的一段时间会比较稳定。

我再次感谢那些对第一版提供意见, 从而对第二版作出贡献的人们, 我期待更多的评论和意见!

Reinhard Diestel
1999 年 12 月

关于第三版

我承认这本书变厚了, 它是否还如同我在第一版 (几乎八年前) 的序言中提到的那样, 这本书应该是 “精炼并把重点放在基础上” 呢?

我相信答案是肯定的, 也许现在比以前更有甚者。那么, 为什么篇幅增加了呢? 部分的答案是我继续追求原来的双重目标, 即内容上提供两种不同的东西:

- 一本可靠的初等入门图论, 可作为个人研究之用或课程教材;
- 一本研究生教材, 它在某些专题上有一定的深度。

对每个目标, 我们都增加了一些内容。其中包括一些新的主题, 可以根据自己的意愿保留或跳过。例如, 在入门知识层次上, 一个新内容是关于填装和覆盖的章节, 它包含 Erdős-Pósa 定理; 另外在关于匹配的章节中增加了稳定婚姻定理。在研究生层次上, 一个新内容是不包含给定子式的图的 Robertson-Seymour 结构定理: 这个结果只需要几行就能叙述, 但它越来越多地出现在各种文献中, 因此包括容易查找的相关参考资料就变得非常必要了。另一个添加的内容也是在图子式的章节, 是关于 “高维曲面的 Kuratowski 定理” 的新证明, 这个证明展示了图子式理论和曲面拓扑之间的相互影响, 比以前的表现更清晰。作为这个定理的补充, 我们给出了一个关于曲面的附录, 它提供了所需的背景资料, 同时也使图子式定理的证明可以清楚明白地显示出来。

为了统一和润色, 我们对无数的局部细节进行了改写, 除了这些部分外, 主要的变化对以前版本的内容影响很小。我意识到, 随着这本书更多地用作教科书, 人们期望它的稳定性, 很多这些局部的改进正是听取了同仁在使用这本书后反馈来的结果, 我十分感谢他们的帮助和建议。

还有一些局部的增添, 大部分来自于我自己的笔记: 当我用本书上课时, 会把一些修改用铅笔写在页边空白处, 这些变动是对一些重要的而技术性证明的补充。通常, 当我感觉在正式的表达中, 一些基本的思路可能被忽略了, 就会这样做。例如, 现在 Erdős-Stone 定理的证明思路有一个非正式的剖析, 看一看正则引理到底是如何起作用的。和正式的证明不一样, 我们首先讨论主要思想, 最后才看到参数是如何确定的; 而在正式证明中, 参数在一开始就要指定。类似地, 在完美图定理的证明中, 也包含一些引导到主要思想上的讨论。然而, 在所有这些情形中, 正式的证明基本上没有什么变化。

唯一对现存内容有重大改变的是原来的定理 8.1.1 (即 cr^2n 条边一定蕴涵一个 TK^r), 因为它的证明似乎失去了原来的魅力 (且较长), 这个证明本来是作

为介绍稀疏极图理论中某些技巧而出现的, 但这些技巧现在转移到连通性一章中, 在那里我们证明了 $2k$-连通图如果有 $8kn$ 条边, 就一定是 k-连接的。这个新证明是由 Thomas 和 Wollan 给出的, 而原来那些技巧现在包含在这个新证明中, 所以这些技巧还在, 只不过比以前更简洁, 并且以不同的面貌出现。受这个变化的影响, 前面关于稠密和稀疏极值图论的两章可以合并, 从而形成新的一章, 可以更贴切地称为*极值图论*。

最后, 我们增加了关于无限图的崭新章节。当图论刚作为数学的一个分支出现时, 通常我们把有限图和无限图作同样的处理。但近几年有了一些变化, 我认为这是个令人失望的损失: 无限图继续作为与数学其他分支之间的自然桥梁是被经常使用的, 同时它本身也拥有特殊的魅力。魅力之一是, 和有限图相比, 所涉及的证明本质上经常需要更多的构造和算法。8.4 节中的 Menger 定理的无限形式就是一个典型的例子: 它揭示了网络的连通性在算法方面的内在联系, 而 3.3 节中有限形式定理的归纳证明虽然漂亮但看不到内在联系。

我再一次感谢所有的读者和同仁, 他们的建议极大地改进了本书。我特别地向 Imre Leader 致谢, 他对无限图的整章给出了很多审慎的建议; 也感谢我的图论讨论班的参加者, 尤其是 Lilian Matthiesen 和 Philipp Sprüssel, 他们检查了这一章并解答了所有的练习 (只有八十个通过了他们的严格审查); 还有 Angelos Georgakopoulos, 他校对了其他章节; 以及 Melanie Win Myint, 他重新编辑并极大地扩充了索引; 感谢 Tim Stelldinger, 他培育了附录 B 引理 B.6 中的巨型鲸 (图 B.1), 直到它强壮到可以携带小型恐龙。

Reinhard Diestel
2005 年 5 月

关于第四版

在第四版, 没有增加很多根本性的新内容, 但进行了很多改进。

和前一版一样, 这一版有无数微小而精细的变化, 主要是对一些论证或概念作进一步阐述。我总是十分感谢读者的反馈, 并根据这些反馈对某些细节重新叙述, 使得它变得更容易理解。也许这些改进是很初等的, 例如第一章中子式的定义就是一个很好的例子。

从更根本性的层次看, 我们对几个经典结果给出了新的且更简单的证明, 其中一个把已经很短的证明减少了一半 (而且变得更加漂亮), 这些新添加的证明包括: 婚姻定理, 树 – 填装定理, Tutte 圈空间和轮定理, Fleischner 的 Hamilton 圈定理, 关于边概率保证某种类型子图的阈定理。也有一两个真正新的定理, 其中一个是由 Asratian 和 Khachatrian 得到的具有独创性的 Hamilton 圈存在的局部度条件, 它蕴涵着若干个经典 Hamilton 定理。

在若干章节中, 我稍微重新组织了内容或者重写了叙述。通常, 这些章节都是在前三版的基础上进行了较大的扩充, 所以开始影响了它们在书中的内容和比例。由于我希望本书不仅是汇总一些定理和证明, 也尽可能地提供某种整体的视野, 来看清它们在整体布局中所处的位置, 同时还要保持它原来的新鲜感和流畅感, 做到这些是颇具挑战性的, 我很高兴地迎接这个挑战。

最后, 本书现在有了自己的独立网页:

`http://diestel-graph-theory.com/`

和普通的免费网上版本相比, 这个网站潜在地可以提供更多关于本书的功能, 而不仅仅是总结 (逐渐减少的) 印刷错误。如果你有任何想法或建议, 并希望可以在将来的版本中实现, 请和我联系。

Reinhard Diestel
2010 年 5 月

目　　录

---

* 标注星号的小节可在初等教程中讲授. 标注 (*) 的小节的开篇部分可在初等教程中讲授.

第七章 极值图论 156

第八章 无限图 186

第九章 图的 Ramsey 理论 249

第十章 Hamilton 圈 271

第二章　匹配、覆盖和填装

给定一个图, 如果我们希望找到它的尽可能多的独立边, 应该怎么做呢? 我们是否可以将图中所有顶点两两配对成独立边呢? 如果不行, 又如何肯定这不可能呢? 有点出乎意料的是, 这一基本问题不仅是许多应用问题的核心, 也产生了若干相当有趣的图论问题.

在图 $G=(V,E)$ 中, 独立边构成的集合 M 称为一个**匹配** (matching). 设 $U\subseteq V$, 如果 U 中的每个顶点都与 M 中的一条边相关联, 则称 M 是 U 的一个匹配, 或者说 U 中的顶点被 M**匹配** (matched), 而其他不与 M 中任何边相关联的顶点称为**非匹配** (unmatched) 顶点.

匹配

被 M 匹配

k-正则的支撑子图称为一个 k-**因子** (k-factor). 所以, 一个子图 $H\subseteq G$ 是 G 的 1-因子当且仅当 $E(H)$ 是 V 的一个匹配. 如何刻画具有 1-因子的图, 即刻画包含所有顶点的匹配, 是我们本章中前两节要讨论的主要问题.

因子

给定图族 $\mathcal{H}$, 匹配问题的一个推广就是在已知图 G 中寻找尽可能多的顶点不相交的子图, 使得每个子图都同构于 $\mathcal{H}$ 中的一个元素, 这就是所谓的**填装** (packing) 问题, 它和**覆盖** (covering) 问题紧密相关. 覆盖问题是指在 G 中找到一个尽可能小的顶点集, 使得 G 中任意一个子图, 只要同构于 $\mathcal{H}$ 中的一个元素, 就与这个顶点集相交. 显然, 如果 $\mathcal{H}$ 中的 k 个子图可以不相交地填充到 G 中, 则任何覆盖必须包含至少 k 个顶点. 假如不存在恰好只有 k 个顶点的覆盖, 那么是否总是存在最多 $f(k)$ 个顶点的覆盖呢 (这里的 $f(k)$ 只依赖于 $\mathcal{H}$ 而不依赖于 G)? 在 2.3 节中, 我们将证明当 $\mathcal{H}$ 是一族圈时, 总存在这样一个函数 f.

填装

覆盖

在 2.4 节, 我们会考虑边的填装和覆盖: 在一个给定图中, 我们能找到多少棵边不相交的支撑树呢? 至少需要多少棵树才能覆盖图中所有的边呢? 在 2.5 节, 我们将证明一个有向图的路覆盖定理, 它蕴涵着偏序上的著名 Dilworth 对偶定理.

§2.1　二部图中的匹配

在这一节, 我们总是假设 $G=(V,E)$ 是一个具有二部划分 $\{A,B\}$ 的固定二部图. 设 a, a' 等表示属于 A 的顶点, 而 b, b' 等表示属于 B 的顶点.

$G=(V,E)$
A,B
a,b 等

如何找到 G 中包含尽可能多条边的匹配呢? 对于 G 的任意匹配 M, 一条关于 M 的**交错路** (alternating path) 是指 G 中一条从 A 中非匹配顶点出发, 其边

交错路

在 $E\backslash M$ 和 M 中交错出现的路. 注意到, 这里的路允许是平凡的, 即只包含初始顶点. 若交错路 P 结束于 B 中一个非匹配顶点, 则称 P 为**增广路** (augmenting path) (图 2.1.1). 我们可以通过 P 将 M 扩充成一个更大的匹配: M 和 $E(P)$ 的对称差仍是一个匹配 (考虑关联一个给定顶点的边), 并且被匹配的顶点集增加了两个顶点, 即 P 的端点.

增广路

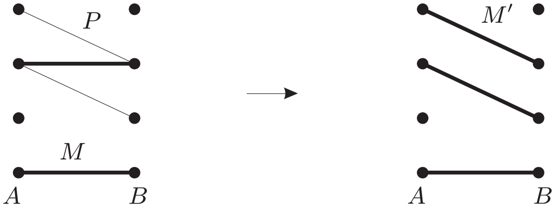

图 2.1.1　通过交错路 P 对匹配 M 进行扩充

交错路在寻找更大的匹配中发挥了重要的作用. 事实上, 从任何一个匹配开始, 通过不断地运用增广路对匹配进行改进, 直到匹配不能进行任何改进为止, 这样所得到的匹配是最优的, 即它具有最大可能的边数 (练习 1). 寻找最大匹配的算法问题最终归结为寻找增广路的问题, 这是一个非常有趣并且更容易理解的算法问题.

第一个定理通过某种对偶条件刻画了 G 中具有最大基数的匹配. 对于集合 $U \subseteq V$, 如果 G 中的每条边都与 U 中的一个顶点相关联, 则称 U 是 E 的一个 **(顶点) 覆盖** ((vertex) cover).

覆盖

定理 2.1.1 (König, 1931)　图 G 中匹配的最大基数等于其边的顶点覆盖的最小基数.

M

证明　设 M 是 G 中具有最大基数的匹配. 从 M 的每一条边中选择一个端点组成集合 U 如下: 如果存在一条交错路终止于这条边在 B 中的端点, 则选择此端点; 否则, 选择这条边在 A 中的端点 (图 2.1.2). 下面证明这 $|M|$ 个顶点构成的集合 U 覆盖 E. 由于 E 的任何一个顶点覆盖必须覆盖 M, 因此不存在少于 $|M|$ 个顶点的覆盖, 所以定理成立.

U

设 $ab \in E$ 为一条边, 我们证明 a 或者 b 属于 U. 如果 $ab \in M$, 由 U 的定义知结论成立, 故我们假设 $ab \notin M$. 因为 M 是一个极大匹配, 所以它包含一条边 $a'b'$ 使得 $a' = a$ 或者 $b' = b$. 事实上, 我们可以假设 $a = a'$: 因为如果 a 是非匹配顶点 (且 $b = b'$), 那么 ab 是一条交错路, 从而 $a'b' \in M$ 的端点中被选入 U 的顶点为 $b' = b$. 如果 $a' = a$ 不在 U 中, 那么 $b' \in U$, 且存在一条交错路 P 终止于 b', 那么也存在一条交错路 P' 终止于 b: 要么 $P' := Pb$ (如果 $b \in P$), 要么

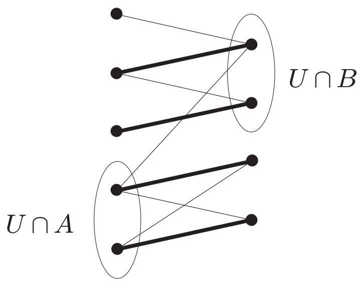

图 2.1.2　顶点覆盖 U

$P' := Pb'a'b$. 由 M 的极大性知, P' 不是一条增广路, 所以 b 一定被匹配, 且通过包含 b 的 M 中的边被选入 U. □

让我们回到原来的主题, 即寻找 1-因子存在的充分必要条件. 在二部图的情形, 我们也可以考虑更一般性的问题, 即 G 什么时候包含一个饱和 A 的匹配; 这时如果 $|A| = |B|$, 它将成为 G 的 1-因子, 这也是 G 包含 1-因子的必要条件.

存在饱和 A 的匹配的一个明显的必要条件是 A 的每一个子集在 B 中都有足够多的邻点, 即对所有的 $S \subseteq A$, 有

婚姻条件

$$|N(S)| \geqslant |S|.$$

下述的**婚姻定理** (marriage theorem) 表明, 事实上, 这个显而易见的必要条件也是充分的:

定理 2.1.2 (Hall, 1935)　二部图 G 包含饱和 A 的匹配, 当且仅当对所有的 $S \subseteq A$ 均有 $|N(S)| \geqslant |S|$. [2.2.3]

我们给出三个证明, 每个具有不同的特点. [1] 在所有的证明中, 我们假定 G 满足婚姻条件, 目标是找到一个饱和 A 的匹配.

证明 1　设 M 是 G 的任意匹配且包含一个非匹配顶点 $a \in A$, 我们证明存在一个关于 M 的增广路. M, a

设 A' 是 A 中满足可以从 a 经过一条非平凡交错路到达的顶点的集合, 而 $B' \subseteq B$ 是这些路上所有倒数第二个顶点的集合. 这些路的最后一条边都在 M 中, 因此 $|A'| = |B'|$, 由婚姻条件知, 存在从 $S = A' \cup \{a\}$ 中的一个顶点 v 到 $B \setminus B'$ 中的一个顶点 b 的边.

因为 $v \in A' \cup \{a\}$, 所以存在一条从 a 到 v 的交错路 P, 因此 Pvb 或者 Pb (当 $b \in P$ 时) 是一条从 a 到 b 的交错路, 把这条路记为 P'. 如果 b 是被匹配的,

---

[1] 这个定理也可以很容易地从 König 定理推出 (见练习 5).

比如说 $a'b \in M$, 那么 $P'ba'$ 是一条交错路使得 a' 在 A' 中而 b 在 B' 中, 但是 $b \notin B'$, 因此 b 是不被匹配的, 故 P' 就是要找的增广路. □

证明 2 我们对 $|A|$ 用归纳法. 当 $|A| = 1$ 时, 结论显然成立. 假设 $|A| \geqslant 2$, 且当 $|A|$ 较小时, 婚姻条件可以保证饱和 A 的匹配的存在性.

若对每个非空子集 $S \subsetneqq A$ 均有 $|N(S)| \geqslant |S| + 1$, 则任选一条边 $ab \in G$, 并考虑图 $G' := G - \{a, b\}$, 那么每个非空子集 $S \subseteq A \setminus \{a\}$ 都满足:

$$|N_{G'}(S)| \geqslant |N_G(S)| - 1 \geqslant |S|,$$

故由归纳假设知, G' 包含 $A \setminus \{a\}$ 的一个匹配, 连同边 ab, 就得到了 G 中一个饱和 A 的匹配.

假设存在 A 的一个非空真子集 A', 使得对于 $B' := N(A')$ 有 $|B'| = |A'|$. 由归纳假设, 图 $G' := G[A' \cup B']$ 包含饱和 A' 的一个匹配. 然而 $G - G'$ 也满足婚姻条件: 对任何满足 $|N_{G-G'}(S)| < |S|$ 的集合 $S \subseteq A \setminus A'$, 有 $|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$, 与假设矛盾. 同样由归纳法得, 图 $G - G'$ 包含饱和 $A \setminus A'$ 的一个匹配, 把这两个匹配放在一起从而得到了 G 中一个饱和 A 的匹配. □

H

在最后的证明中, 设 H 是 G 的一个满足婚姻条件且包含 A 的边极小子图. 注意到, 对每个 $a \in A$, 把 $S = \{a\}$ 代入婚姻条件可知 $d_H(a) \geqslant 1$.

证明 3 我们证明对每个顶点 $a \in A$ 均有 $d_H(a) = 1$. 由婚姻条件, 不存在 H 的两条边在 B 中有公共顶点, 因此 H 的边构成了饱和 A 的一个匹配.

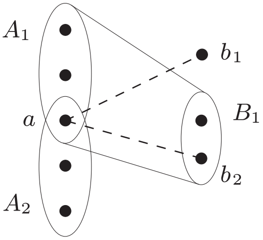

图 2.1.3 B_1 包含 b_2 但不包含 b_1

假设 a 在 H 中有两个不同的邻点 b_1 和 b_2, 由 H 的定义知, 图 $H - ab_1$ 和图 $H - ab_2$ 不满足婚姻条件. 因此, 对 $i = 1, 2$, 存在一个包含 a 的集合 $A_i \subseteq A$

使得对 $B_i := N_{H-ab_i}(A_i)$, 有 $|A_i| > |B_i|$ (图 2.1.3). 由 $b_1 \in B_2$ 和 $b_2 \in B_1$ 知:

$$\begin{aligned}|N_H(A_1 \cap A_2 \setminus \{a\})| &\leqslant |B_1 \cap B_2| \\ &= |B_1| + |B_2| - |B_1 \cup B_2| \\ &= |B_1| + |B_2| - |N_H(A_1 \cup A_2)| \\ &\leqslant |A_1| - 1 + |A_2| - 1 - |A_1 \cup A_2| \\ &= |A_1 \cap A_2| - 2 \\ &= |A_1 \cap A_2 \setminus \{a\}| - 1.\end{aligned}$$

所以 H 不满足婚姻条件, 与假设矛盾. □

最后这个证明有一个漂亮的 “对偶” 命题: 对每个 $b \in B$ 均有 $d_H(b) \leqslant 1$. 细节参考练习 6 及其提示.

推论 2.1.3 若 G 是 k-正则的 $(k \geqslant 1)$, 则 G 包含 1-因子.

证明 若 G 是 k-正则的, 则显然有 $|A| = |B|$; 由定理 2.1.2, 只需证明 G 包含一个饱和 A 的匹配. 对每个集合 $S \subseteq A$, 共有 $k\,|S|$ 条边与 $N(S)$ 相关联, 且这些边属于 G 中与 $N(S)$ 相关联的 $k\,|N(S)|$ 条边中的一部分, 所以 $k\,|S| \leqslant k\,|N(S)|$, 即 G 确实满足婚姻条件. □

在某些实际应用问题中, 匹配不是以图的全局性为考量来选取的, 而是通过在局部做独立的决定而由相关的顶点逐步形成的. 一个典型的情形就是顶点对于选取哪条边来匹配顶点是有优先考量的, 而不是对所有的关联边一视同仁. 这样, 若 M 是一个匹配, $e = ab$ 是一条不属于 M 的边, 且 a 和 b 都倾向于 e 胜过它们当前的匹配边 (若它们是被匹配的话), 那么 a 和 b 可能倾向包含 e 而抛弃先前的匹配边, 从而在局部上改变了 M. 因此, 匹配 M 尽管可能是最大的, 但却是不稳定的.

更正式地, 由 $E(v)$ 上的线性序 $\leqslant_v$ 所形成的序族 $(\leqslant_v)_{v \in V}$ 被称为 G 的一个**优先集** (set of preferences). 如果对每条边 $e \in E \setminus M$, 都存在一条边 $f \in M$ 使得 e 和 f 有一个公共顶点 v 且 $e <_v f$, 则称匹配 M 在 G 中是**稳定的** (stable). 下面的结果通常被称为**稳定婚姻定理** (stable marriage theorem):

优先

稳定匹配

定理 2.1.4 (Gale & Shapley, 1962) 对任意给定优先集, 图 G 都有一个稳定匹配.

[5.4.4]

证明 (与练习 15 比较) 对于匹配 M 和 M', 如果 M 比 M' 使得 B 中的顶点更幸福, 也就是说, 对每一个顶点 b, 如果与 b 相关联的边 $f' \in M'$ 以及边 $f \in M$ 总是满足 $f' \leqslant_b f$, 那么我们称匹配 M 在 G 中比匹配 $M' \neq M$ **更好**

(better); 我们将构造一系列越来越好的匹配. 因为这些匹配对每个顶点 b 最多增加 $d(b)$ 次幸福, 因此这个过程一定会结束.

给定一个匹配 M, 若 $e = ab \in E \setminus M$ 且以 b 为端点的边 $f \in M$ 满足 $f <_b e$, 则称顶点 $a \in A$ 对于 $b \in B$ 是**可接受的** (acceptable); 如果 a 是非匹配的, 或者它的匹配边 $f \in M$ 满足: 对所有使得 a 对于 b 是可接受的边 $e = ab$ 都有 $f >_a e$, 则称 $a \in A$ 与 M **相处幸福** (happy with).

从空匹配开始, 让我们构造一个匹配序列并保持 A 中所有顶点是幸福的. 给定这样一个匹配 M, 考察未被匹配的但对某个 $b \in B$ 是可接受的顶点 $a \in A$ (如果不存在这样的 a, 则终止序列), 添加 $\leqslant_a$-极大边 ab 到 M 使得 a 对于 b 是可接受的, 并从 M 中删除以 b 为端点的边.

显然, 在我们的序列中每个匹配都比前一个更好, 并且容易归纳地验证它们都保持 A 中顶点是幸福的. 所以, 这个序列将继续进行下去直到终止于匹配 M, 使得 A 中每个非匹配的顶点对于它在 B 中的所有邻点是不可接受的. 由于 A 中每个被匹配的顶点与 M 相处是幸福的, 故这个匹配是稳定的. □

尽管婚姻定理的表述看起来比较狭隘, 但它在图论及其他领域中都属于应用最为广泛的图论定理之一. 然而, 将一个问题重新叙述为二部图的匹配形式通常需要灵活掌握. 作为一个简单的例子, 我们现在用婚姻定理来推导图论中最早的结果之一, 这个结果的原始证明一点也不简单, 当然也不简短.

(1.8.1) **推论 2.1.5 (Petersen, 1891)**　每个具有正偶数顶点度的正则图都有 2-因子.

证明　设 G 是一个 $2k$-正则图 ($k \geqslant 1$), 不妨设 G 是连通的. 由定理 1.8.1 知, 图 G 包含一个Euler 环游 $v_0 e_0 \ldots e_{\ell-1} v_\ell$, 且 $v_\ell = v_0$. 用一对顶点 (v^-, v^+) 代替每个顶点 v, 用边 $v_i^+ v_{i+1}^-$ 代替每一条边 $e_i = v_i v_{i+1}$ (图 2.1.4), 得到的二部图 G' 是 k-正则的, 故由推论 2.1.3 知, G' 有 1-因子. 将每个顶点对 (v^-, v^+) 整合成一个顶点 v, 那么 G' 的 1-因子就转化成 G 的一个 2-因子. □

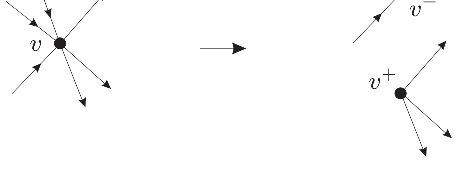

图 2.1.4　推论 2.1.5 的证明中顶点的分裂过程

§2.2 一般图中的匹配

给定图 G, 我们用 $\mathcal{C}_G$ 表示它的分支的集合, 用 $q(G)$ 表示 $\mathcal{C}_G$ 中**奇分支** (odd component) (即阶为奇数的分支) 的个数. 若 G 有 1-因子, 显然对所有的 $S \subseteq V(G)$ 有

$\mathcal{C}_G$, $q(G)$

$$q(G-S) \leqslant |S|,$$

Tutte 条件

这是因为 $G-S$ 的每个奇分支都有一条因子边与 S 相连.

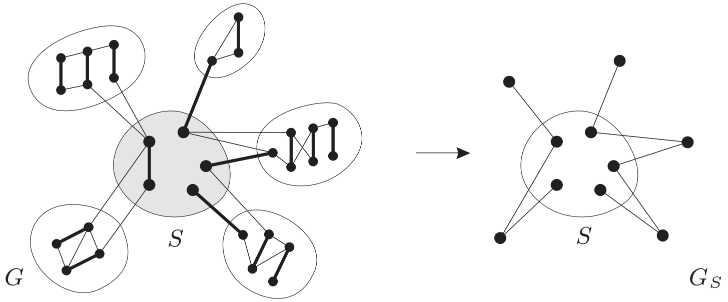

图 2.2.1 $q=3$ 时 Tutte 条件 $q(G-S) \leqslant |S|$, 以及定理 2.2.3 中的收缩图 G_S

同时, 1-因子存在的这个明显必要条件也是充分的:

定理 2.2.1 (Tutte, 1947) 图 G 有 1-因子当且仅当对所有的 $S \subseteq V(G)$, 有 $q(G-S) \leqslant |S|$.

证明 设 $G=(V,E)$ 是不含 1-因子的图. 我们的目标是找到一个与 Tutte 条件相悖的坏集合 $S \subseteq V$.

(V,E)

坏集合

不妨设 G 是不含 1-因子的边极大图, 即如果 G' 是由 G 通过增加边得到的图, 且 $S \subseteq V$ 对 G' 而言是个坏集合, 那么 S 对 G 也是一个坏集合: $G'-S$ 的任何奇分支都是 $G-S$ 的某些分支的并, 这些分支中总有一个仍是奇的.

那么 G 是怎样的一个图呢? 如果 G 有一个坏集合 S, 那么由它的边极大性和定理的条件不难看出:

$G-S$的所有分支都是完全的, 且每个顶点 $s \in S$与 $G-s$ 的所有顶点相邻接. $(*)$

反过来, 如果集合 $S \subseteq V$ 满足 $(*)$, 那么集合 S 或者空集一定是坏的: 如果 S 不是坏集合, 我们可以将 $G-S$ 的奇分支与 S 中不同的顶点连接起来, 并把剩下的顶点两两配对; 除非 $|G|$ 是奇数, 而在这种情况下 $\emptyset$ 是个坏集合.

S a, b, c d M_1 M_2

因此, 只需证明 G 有一个满足 $(*)$ 的顶点集合 S. 令 S 表示与其他每个顶点都相邻的顶点的集合. 如果这个集合 S 不满足 $(*)$, 那么存在 $G-S$ 的一个分支包含不相邻的顶点 a, a'. 令 a, b, c 依次表示该分支中一条最短 a–a' 路上的前三个顶点, 则 $ab, bc \in E$ 而 $ac \notin E$. 因为 $b \notin S$, 故存在顶点 $d \in V$ 使得 $bd \notin E$. 由 G 的极大性知, $G+ac$ 中存在 V 的一个 1-因子 M_1, $G+bd$ 中存在 V 的一个 1-因子 M_2.

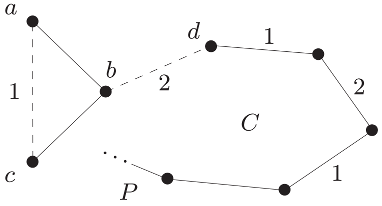

图 2.2.2 若 S 不满足 $(*)$, 导出矛盾

令 $P = d \ldots v$ 表示 G 中一条从 d 开始的极长路, 它以 M_1 中的边为起始边, 并交替地包含 M_1 和 M_2 中的边 (图 2.2.2). 若 P 的最后一条边属于 M_1, 则 $v = b$, 因为其他情况下, P 可继续走下去; 这时, 令 $C := P + bd$. 若 P 的最后一条边属于 M_2, 则由 P 的极大性知, 以 v 为端点的 M_1-边一定是 ac, 所以 $v \in \{a, c\}$; 这时, 令 C 表示圈 $dPvbd$. 在每一种情况下, C 都是一个偶圈, 它的边每隔一条在 M_2 中, 且唯一不属于 E 的边是 bd. 用 $C - M_2$ 的边替换 M_2 中在 C 上的边, 我们得到了 V 的一个包含在 E 中的 1-因子, 矛盾. □

推论 2.2.2 (Petersen, 1891) 每个无桥的立方图都有 1-因子.

证明 我们证明任何一个无桥立方图 G 都满足 Tutte 条件. 给定 $S \subseteq V(G)$, 考虑 $G-S$ 的奇分支 C. 因为 G 是立方的, 所以 C 中顶点 (在 G 中的) 度数之和为奇数, 但是这个度数和中由 C 中的边产生的部分为偶数, 故 G 有奇数条 S–C 边, 从而至少有 3 条这样的边 (因为 G 不含桥). 所以 S 和 $G-S$ 之间的边的总数至少为 $3q(G-S)$. 然而, 由于 G 是立方图, 所以 S 和 $G-S$ 之间边的总数至多为 $3|S|$, 从而 $q(G-S) \leqslant |S|$, 正如所希望的那样. □

为了使匹配理论中所运用的技巧更清楚明了, 现给出 Tutte 定理的第二个证明. 事实上, 我们将证明一个更强的结果, 这个结果从匹配的角度给出了任意图上的一个有趣结构. 如果它满足 Tutte 定理的条件, 那么这个结构将立即蕴涵着一个 1-因子.

因子临界的

非空图 $G = (V, E)$ 称为**因子临界的** (factor-critical), 如果 G 不包含 1-因子但对每个顶点 $v \in G$, 图 $G - v$ 包含 1-因子. 给定集合 $S \subseteq V$, 令 G_S 是由 G 通

过把分支 $C \in \mathcal{C}_{G-S}$ 收缩成单个顶点, 并删除 S 内部的边而得到的图. (正式地, 图 G_S 的顶点集为 $S \cup \mathcal{C}_{G-S}$, 而边集为 $\{sC \mid \exists c \in C$ 使得 $sc \in E\}$; 见图 2.2.1.) 如果 (二部[2]) 图 G_S 包含饱和 S 的一个匹配, 我们称顶点集合 S 与 $\mathcal{C}_{G-S}$ 是**可匹配的** (matchable). G_S 可匹配的

定理 2.2.3 每个图 $G = (V, E)$ 都包含一个顶点集 S 满足下面两条性质:

(i) S 与 $\mathcal{C}_{G-S}$ 是可匹配的;

(ii) $G - S$ 的每个分支都是因子临界的.

给定任意这样的集合 S, 图 G 包含 1-因子当且仅当 $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$.

给定任意图 G, Tutte 定理的结论很容易由这个结果推出. 事实上, 由 (i) 和 (ii), 我们可得 $|S| \leqslant |\mathcal{C}_{G-S}| = q(G-S)$ (因为因子临界图一定有奇数阶); 从而 Tutte 条件 $q(G-S) \leqslant |S|$ 蕴涵着 $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$, 由定理 2.2.3 的最后一部分论述知 1-因子存在.

定理 2.2.3 的证明 首先注意到定理的最后部分的论断可以立即由论断 (i) 和 (ii) 推出: 若 G 有 1-因子, 则 $q(G-S) \leqslant |S|$, 从而如上述有 $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$; 反过来, 如果 $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$, 那么由 (i) 和 (ii) 可直接推出 1-因子的存在. (2.1.2)

下面对 $|G|$ 用归纳法来证明满足 (i) 和 (ii) 的集合 S 的存在性. 对 $|G| = 0$, 可令 $S = \emptyset$. 对给定图 G 且 $|G| > 0$, 假设对包含较少顶点的图结论成立.

考虑不满足 Tutte 条件的最坏情况下的集合 $T \subseteq V$, 即

$$d(T) := d_G(T) := q(G-T) - |T|$$

d

是最大的, 并令 S 是满足上述条件的最大的这种集合 T. 注意到 $d(S) \geqslant d(\emptyset) \geqslant 0$. S

首先证明每个分支 $C \in \mathcal{C}_{G-S} =: \mathcal{C}$ 是奇的. 如果 $|C|$ 是偶数, 任取一个顶点 $c \in C$, 考虑 $T := S \cup \{c\}$. 由于 $C - c$ 是奇数阶的, 它至少有一个奇分支, 这个分支也是 $G - T$ 的一个分支. 因此, $\mathcal{C}$

$$q(G-T) \geqslant q(G-S) + 1 \qquad \text{且} \qquad |T| = |S| + 1,$$

所以 $d(T) \geqslant d(S)$, 这与 S 的选择矛盾.

下面证明结论 (ii), 即每个 $C \in \mathcal{C}$ 是因子临界的. 假设存在 $C \in \mathcal{C}$ 和 $c \in C$ 使得 $C' := C - c$ 不含 1-因子. 由归纳假设 (以及前面所证的事实, 即对固定的 G, 本定理蕴涵着 Tutte 定理), 存在集合 $S' \subseteq V(C')$ 满足:

$$q(C' - S') > |S'|.$$

---

[2] S 或 $\mathcal{C}_{G-S}$ 为空集的这两种 (允许的) 情形除外.

既然 $|C|$ 是奇数, 那么 $|C'|$ 是偶数, 从而 $q(C'-S')$ 和 $|S'|$ 要么同为偶数, 要么同为奇数, 故它们不可能恰好相差 1. 因此我们可以将上面的不等式改进为

$$q(C'-S') \geqslant |S'|+2,$$

从而 $d_{C'}(S') \geqslant 2$, 所以对于 $T := S \cup \{c\} \cup S'$, 我们有

$$d(T) \geqslant d(S)-1-1+d_{C'}(S') \geqslant d(S),$$

其中, 第一个 “-1” 来自于 C 作为奇分支的减少, 第二个 “-1” 来自于集合 T 包含 c. 和前面一样, 这与 S 的选择矛盾.

余下还需证明 S 与 $\mathcal{C}_{G-S}$ 匹配. 如果不成立, 则由婚姻定理知, 存在一个集合 $S' \subseteq S$ 与 $\mathcal{C}$ 中少于 $|S'|$ 个分支相连接. 由于 $\mathcal{C}$ 的其他分支也是 $G-(S\setminus S')$ 的分支, 故集合 $T=S\setminus S'$ 满足 $d(T)>d(S)$, 这与 S 的选择矛盾. □

S

让我们再一次考察定理 2.2.3 中的集合 S 以及 G 中的任意匹配 M. 和前面一样, 记 $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$, 另外 k_S 表示 M 中至少有一个端点属于 S 的边的数目, $k_{\mathcal{C}}$ 表示 M 中两个端点全在 $G-S$ 中的边的个数. 由于每个 $C \in \mathcal{C}$ 为奇数阶, 故它的顶点中至少有一个不与第二种类型的边相关联. 因此, 每个匹配 M 都满足:

$\mathcal{C}, k_S, k_{\mathcal{C}}$

$$k_S \leqslant |S| \quad 且 \quad k_{\mathcal{C}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(|V|-|S|-|\mathcal{C}|\Big). \tag{1}$$

M_0

此外, G 包含一个匹配 M_0 同时满足上述两种情况的等式: 首先根据 (i) 在 S 与 $\bigcup\mathcal{C}$ 之间选择 $|S|$ 条边, 然后用 (ii) 在每个分支 $C\in\mathcal{C}$ 中找到一个合适的且包含 $\frac{1}{2}(|C|-1)$ 条边的集合. 这样, 这个匹配 M_0 恰有

$$|M_0| = |S| + \frac{1}{2}\Big(|V|-|S|-|\mathcal{C}|\Big) \tag{2}$$

条边.

把 (1) 和 (2) 合起来, 我们看到每一个具有最大基数的匹配 M 使得 (1) 中的不等式取等号: 由 $|M| \geqslant |M_0|$ 和 (2) 知, M 包含至少 $|S|+\frac{1}{2}\big(|V|-|S|-|\mathcal{C}|\big)$ 条边, 从而 (1) 中的两个不等式都不可能是严格的. 但是, (1) 中的等式还表明 M 具有上述结构: 由 $k_S=|S|$ 知, 每个顶点 $s\in S$ 是满足 $t \in G-S$ 的边 $st\in M$ 的一个端点; 由 $k_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\big(|V|-|S|-|\mathcal{C}|\big)$ 知, 对每个 $C\in\mathcal{C}$, M 恰包含 C 的 $\frac{1}{2}(|C|-1)$ 条边. 最后, 因为后面提到的这些边在每个 C 中只错过了一个顶点, 那么对于不同的 s 上述的边 st 的端点 t 属于不同的分支 C 中.

注意到, 看似技术性的定理 2.2.3 隐藏了大量的结构信息: 它包含了关于任意图中最大匹配的详细且本质性的描述. 关于这个结构性定理的完整描述 (它通常被称为 **Gallai-Edmonds 匹配定理** (Gallai-Edmonds matching theorem)) 的出处, 我们将在本章结尾的注解中给出.

§2.3 填装和覆盖

在 2.1 节中, König 和 Hall 定理的主要魅力所在是, 只要某个很明显的障碍子图不出现, 我们想要的匹配就存在了. 例如, 在 König 定理中, 除非可用少于 k 个顶点来覆盖图中的所有边, 否则我们总可以找到 k 条独立边.

更一般地, 如果 G 是一个任意图 (不必是二部图), 而 $\mathcal{H}$ 是任意图族, 我们尝试把 $\mathcal{H}$ 中 (可能相同的) 若干图不相交地填装到 G 中. 设最多可能填装的图的个数为 k, 将 k 和 G 中可以覆盖 $\mathcal{H}$ 中的所有子图的顶点最小数 s 进行比较. 如果 s 有一个独立于 G 的、关于 k 的函数作为上界, 则称 $\mathcal{H}$ 具有 **Erdős-Pósa 性质** (Erdős-Pósa property). (所以, 严格地说, $\mathcal{H}$ 有这个性质意味着, 存在一个 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的函数 $k \mapsto f(k)$ 使得对于每个 k 和 G, 或者 G 包含 k 个不相交子图, 其中每个都和 $\mathcal{H}$ 中的一个图同构, 或者存在一个至多有 $f(k)$ 个顶点的集合 $U \subseteq V(G)$ 使得 $G - U$ 没有子图属于 $\mathcal{H}$.) Erdős-Pósa 性质

在这一节, 我们的目标是证明 Erdős-Pósa 定理, 即所有圈组成的图族具有这样的性质: 我们能够找到一个函数 f (大约是 $4k \log k$) 使得每个图或者包含 k 个不相交的圈, 或者包含一个至多有 $f(k)$ 个顶点的集合覆盖所有圈.

我们先证明立方图中一个更强的命题. 对于 $k \in \mathbb{N}$, 令

$$s_k := \begin{cases} 4kr_k, & \text{如果} \quad k \geqslant 2; \\ 1, & \text{如果} \quad k \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{这里} \quad r_k := \log k + \log\log k + 4.$$ s_k, r_k

引理 2.3.1 *设 $k \in \mathbb{N}$, 且 H 是一个立方多重图. 若 $|H| \geqslant s_k$, 则 H 包含 k 个不相交的圈.*

证明 我们对 k 用数学归纳法. 当 $k \leqslant 1$ 时, 这个结论显然成立. 设 $k \geqslant 2$, (1.3.5)
归纳假设命题对于 $k-1$ 成立. 设 C 是 H 中的一个最短圈.

我们首先证明 $H-C$ 包含一个立方多重图的细分 H' 使得 $|H'| \geqslant |H|-2|C|$.
设 m 是 C 和 $H-C$ 之间的边数. 由于 H 是立方图且 $d(C)=2$, 所以我们有 m
$m \leqslant |C|$. 现在我们考虑 $V(H)$ 的二部划分 $\{V_1, V_2\}$. 首先令 $V_1 := V(C)$ 并且允许 $V_2 = \emptyset$. 如果 $H[V_2]$ 有一个顶点的度数至多为 1, 那么我们把这个顶点移动到 V_1 中, 从而获得一个新的划分 $\{V_1, V_2\}$, 且划分的两个部分之间的边数更少. 假
设存在 n 个这样的移动 (我们的假设蕴涵着 $n \leqslant 3$, 但这里我们并不需要这个), n
但没有更多的, 那么得到的划分 $\{V_1, V_2\}$ 的两个部分之间的边数至多是 $m-n$, 并且 $H[V_2]$ 至多有 $m-n$ 个顶点的度小于 3, 这是因为这些顶点都和一条割边关联. 由于不能把这些顶点移动到 V_1 中去, 所以这些顶点在 $H[V_2]$ 中的度数恰好为 2. 设 H' 是在 $H[V_2]$ 中压缩这些度为 2 的顶点后得到的立方多重图, 则得

到所需的结果

$$|H'| \geqslant |H| - |C| - n - (m - n) \geqslant |H| - 2|C|.$$

要完成证明, 只需证明 $|H'| \geqslant s_{k-1}$. 由推论 1.3.5 知 $|C| \leqslant 2\log|H|$ (或者, 如果 $|C| = g(H) \leqslant 2$, 则 $|H| \geqslant s_k$) 以及 $|H| \geqslant s_k \geqslant 6$, 则

$$|H'| \geqslant |H| - 2|C| \geqslant |H| - 4\log|H| \geqslant s_k - 4\log s_k.$$

(在最后一个不等式中, 用到了函数 $x \mapsto x - 4\log x$ 在 $x \geqslant 6$ 时的递增性.)

接下来只需证明 $s_k - 4\log s_k \geqslant s_{k-1}$. 当 $k = 2$ 时, 显然成立, 因此我们假设 $k \geqslant 3$, 则 $r_k \leqslant 4\log k$ (这对于 $k \geqslant 4$ 时显然成立, 而对 $k = 3$ 的情形还需要若干计算), 那么

$$\begin{aligned} s_k - 4\log s_k &= 4(k-1)r_k + 4\log k + 4\log\log k + 16 - (8 + 4\log k + 4\log r_k) \\ &\geqslant s_{k-1} + 4\log\log k + 8 - 4\log(4\log k) \\ &= s_{k-1}. \end{aligned}$$

□

定理 2.3.2 (Erdős & Pósa, 1965)　*存在一个函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 使得对任意 $k \in \mathbb{N}$, 每个图或者包含 k 个不相交的圈, 或者存在一个至多有 $f(k)$ 个顶点的集合与所有圈相交.*

证明　我们证明当 $f(k) := \lfloor s_k + k - 1 \rfloor$ 时结论成立. 给定整数 k, 并设 G 是一个任意图. 不妨设 G 包含一个圈, 则它有一个极大子图 H 使得 H 中每个顶点的度数为 2 或 3. 设 U 是 H 中度数为 3 的顶点的集合. U

设 $\mathcal{C}$ 是图 G 中与 U 不相交, 且与 H 恰好交于一个顶点的所有圈的集合. 设 $Z \subseteq V(H) \setminus U$ 是这些顶点的集合. 对于每个 $z \in Z$ 选出一个圈 $C_z \in \mathcal{C}$ 与 H 恰好交于 z, 设 $\mathcal{C}' := \{C_z \mid z \in Z\}$, 由 H 的极大性, $\mathcal{C}'$ 中的圈互不相交. Z

设 $\mathcal{D}$ 是 H 的与 Z 不相交的 2-正则分支的集合, 则 $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}$ 是另一个互不相交的圈集. 如果 $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \geqslant k$, 证明完成; 否则, 可以在 $\mathcal{D}$ 中的每个圈上取一个顶点添加到 Z 中, 得到一个集合 X, 它至多有 $k-1$ 个顶点, 且与 $\mathcal{C}$ 中的所有圈以及 H 的所有 2-正则分支相交. 现在考虑 G 中任意不与 X 相交的圈. 由 H 的极大性知, 它与 H 相交, 但不是 H 的分支, 也不在 $\mathcal{C}$ 中, 而且不包含 U 外的任意两个不同顶点之间的 H-路 (由 H 的极大性), 从而这个圈与 U 相交. X

我们已经证明 G 中的每个圈与 $X \cup U$ 相交. 由于 $|X| \leqslant k - 1$, 除非 H 包含 k 个互不相交的圈, 否则我们只需证明 $|U| < s_k$. 对压缩 H 中的 2 度顶点得到的多重图运用引理 2.3.1 即可得到所要的结论. □

在第十二章我们将会再次碰到 Erdős-Pósa 性质. 在那里, 定理 2.3.2 的一个非常重要的推广将会是图子式理论中一个令人意外的简单推论.

§2.4 树填装和荫度

在这一节, 我们考虑边的而不是顶点的填装和覆盖. 在一个给定的图中, 能找到多少个边不交的支撑树呢? 如果不要求是边不相交的, 至少需要多少棵树才可以覆盖这个给定图呢?

为了启发树填装问题, 先假设我们的图代表一个通信网络, 并且在任意两个顶点之间我们希望找到 k 条边不相交的路. 在下一章中, Menger 定理 (3.3.6 (ii)) 将会告诉我们只要是 k-边连通图, 这些路就存在, 显然这个条件也是必要的. 虽然 Menger 定理是一个很好的定理, 但是它没有告诉我们怎样找到这些路; 特别地, 即使已经找到一对顶点之间的这些路, 也不一定对寻找另外一对顶点之间的路有帮助. 如果一个图有 k 棵边不交的支撑树, 那么就有 k 条这样的路, 每一棵树中有一条. 只要把这些树储存在电脑中, 那么对任意给定的一对顶点就可以很快地找到 k 条路.

什么时候一个图 G 有 k 棵边不交的支撑树呢? 如果有, 这个图必定是 k-边连通的. 反之, 很容易看到这不成立 (如 $k = 2$ 时); 的确, 任意边连通性是否蕴涵 k 棵边不交支撑树的存在并不十分明显. (但是可以考虑下面的推论 2.4.2.)

我们还有另外一个必要条件: 若 G 有 k 棵边不交的支撑树, 则对于把 $V(G)$ 任意地划分为 r 个部分, G 的每棵支撑树至少有 $r-1$ 条**交叉边** (cross-edges), 即那些两个端点位于不同部分中的边 (为什么?). 因此, 若 G 有 k 棵边不交的支撑树, 则它至少有 $k(r-1)$ 条交叉边. 这个条件也是充分的: 交叉边

定理 2.4.1 (Nash-Williams, 1961; Tutte, 1961) 一个多重图包含 k 棵边不交的支撑树, 当且仅当对任意顶点集的划分 P, 它有至少 $k(|P|-1)$ 条交叉边. [6.4.4]

在证明定理 2.4.1 之前, 我们首先注意到一个惊人的推论: 为了确保 k 棵边不交支撑树的存在性, 只要把边连通性提高到 $2k$ 即可.

推论 2.4.2 每个 $2k$-边连通多重图 G 有 k 棵边不交的支撑树.

证明 在图 G 的任意顶点划分中, 每个部分与其他部分至少有 $2k$ 条边相连. 因此, 对于任意划分为 r 个部分的划分, G 有至少 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} 2k = kr$ 条交叉边, 由定理 2.4.1 知结论成立. □

为了证明定理 2.4.1 中的非平凡蕴涵关系, 给定多重图 $G = (V, E)$ 和 $k \in \mathbb{N}$, $G = (V, E)$ k

$F_1, \dots, F_k$

我们的方法如下: 因为我们并不知道要找的树是否存在, 所以一开始考虑一族 k 个边不交的支撑森林, 显然这样的森林总是存在的. 设 $F_1, \dots, F_k$ 是一族森林使得它们的边集并 $E(F_1 \cup \dots \cup F_k)$ 是极大的. 然后, 我们寻找至少包含两个顶点的集合 U 使得它在每个 F_i 中是连通的. 若 $U = V$, 则已有的森林 F_i 实际上就是树, 证明结束; 如果 $U \subsetneqq V$, 我们收缩 U 并对多重图 G/U 用归纳法, 然后由 G/U 的 k 棵边不交的支撑树通过插入树 $F_i[U]$ 而得到 G 的 k 棵边不交的支撑树.

U_0

如何构造这样的集合 U 呢? 一开始, 我们找到两个顶点的集合 $U_0 = \{x^*, y^*\}$ 使得这两个顶点在 G 中相邻但在任何 F_i 中不相邻, 这样做的原因在后面可以看得更清楚. 我们希望 U 的顶点在每个 $F_i[U]$ 中是连接的, 但它们在 $F_i[U_0]$ 中是不连接的, 因此需要增加一些路: 令 H_1 是路 $x^*F_iy^*$ 的并, 每个 i 选一个, 且 $U_1 := V(H_1)$. (后面, 我们需要证明这些路的存在性.) 因此对每个 i, x^* 和 y^* 在 $F_i[U_1]$ 中是连接的. 但是, 我们有很多新的顶点对, 它们不一定在每个 $F_i[U_1]$ 中连接. 为了把这些顶点也连接起来, 我们增加更多的路, 等等. 因为图 G 是有限的, 这个过程最后会稳定下来: 得到一个顶点集 U_n, 它在每个 F_i 中是连通的.

引理 2.4.3　对 $E \setminus E(F_1 \cup \dots \cup F_k)$ 中的每条边 $e^* = x^*y^*$, 存在集合 $U \subseteq V$ 使得对每个 $i = 1, \dots, k$, U 在 $F_i[U]$ 中是连通的且包含 x^* 和 y^*.

n

证明　考虑 (唯一的) 路集合的极大序列 $\emptyset = \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_n$ 使得 $\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_{\ell-1} \neq \emptyset$ 并且对所有的 $\ell \geqslant 1$, 有

$$\mathcal{P}_\ell = \mathcal{P}_{\ell-1} \cup \{xF_iy \mid xy \in E_{\ell-1}; i = 1, \dots, k\}, \tag{1}$$

E_ℓ

这里 $E_0 := \{e^*\}$, 且对所有的 $\ell \geqslant 1$, $E_\ell := E(\bigcup \mathcal{P}_\ell) \setminus \bigcup_{i<\ell} E_i$. (稍后, 我们会证明这些路 xF_iy 的存在, 即 x 和 y 处于 F_i 的同一个分支中.) 所以, 对于 $\ell \geqslant 1$, 集合 E_ℓ 是由 "在第 ℓ 步添加的" 边 (对 ℓ 使用归纳法) 组成的. 每次增加的路 $P \subseteq F_j$, 可以帮助我们在下一步来构造添加到别的 F_i 上的途径, 即如果有必要, 我们把 P 中也属于 F_i 的边的端点 x, y 通过 xF_iy 连接起来. 最后, 对于 $\ell = n + 1$ 我们根据 (1) 定义 $\mathcal{P}_{n+1}$. 注意到, 由 n 的极大性知 $\mathcal{P}_{n+1} \setminus \mathcal{P}_n = \emptyset$.

H_ℓ, U_ℓ
$\ell(P), \ell(e)$
$P(e)$
$e(P)$

对所有 $1 \leqslant \ell \leqslant n + 1$, 记 $H_\ell := \bigcup \mathcal{P}_\ell$ 和 $U_\ell := V(H_\ell)$. 对每个 $P \in \mathcal{P}_n$, 设 $\ell(P)$ 是唯一的 ℓ 使得 $P \in \mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_{\ell-1}$. 对每个 $e \in \bigcup_{\ell=0}^{n} E_\ell$, 设 $\ell(e)$ 是唯一的 ℓ 使得 $e \in E_\ell$. 对每个 $1 \leqslant \ell \leqslant n$ 和 $e \in E_\ell$, 选择一条包含 e 的路 $P(e) \in \mathcal{P}_\ell$. 对所有 $1 \leqslant \ell \leqslant n$ 和 $P \in \mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_{\ell-1}$, 选择连接 P 的端点的边 $e(P) \in E_{\ell-1}$. (所以, 如果 $P = xF_iy$, 则 $e(P)$ 是 (若干个可能的平行) 边 $xy \in E_{\ell-1}$ 中的一个, 这里 P 是满足 (1) 的.) 因此, 对每个 e 和 P, 有

$$\ell(e) = \ell(P(e)) \quad 和 \quad \ell(P) > \ell(e(P)). \tag{2}$$

下面证明 (1) 中的路 xF_iy 总是存在的, 即对每一条边 $xy \in \bigcup_{\ell=0}^{n} E_\ell$ 和每一个 i, 顶点 x, y 位于 F_i 的同一个分支中. 如果不然, 把边 xy 加到 F_i 中, 那么 F_i 仍是一个森林. 其次, 考虑极大序列 $e_1, P_1, e_2, P_2, e_3, \ldots$ 使得 $e_1 = xy$ 且对所有的 q 有 $P_q = P(e_q)$ 和 $e_{q+1} = e(P_q)$. 因为对所有的边 $e \in \bigcup_{\ell=1}^{n} E_\ell$, 路 $P(e)$ 是明确定义的, 并且对每个路 $P \in \mathcal{P}_n$, 边 $e(P)$ 是明确定义的, 所以这个序列只能结束于边 e^*. 进一步地, 因为对于所有的 q, (2) 蕴涵着 $\ell(e_q) = \ell(P_q) > \ell(e_{q+1})$, 所以这个序列确实终止. 记得我们把 e_1 加到 F_i 中. 对于 $q = 1, 2, \ldots$, 我们归纳地从包含 P_q 的森林 F_j 中删除 e_q, 并且把 e_{q+1} 加到这个森林中. 因为 $P_q + e_{q+1}$ 是一个圈, 所以这个运算保持 F_j 是一个森林这个性质: 把 e_{q+1} 添加到 $F_j - e_q$ 中并不产生 $F_j - e_q$ 的圈. 在这个过程中, 这些森林 F_j 的每一个可能改变多次, 但是在把 e^* 添加到这些森林的最后一个之后, 最终我们会得到一个新的边不交支撑森林族 $(F_1, \ldots, F_k)$, 比以前增加了一条边, 这和一开始 $F_1, \ldots, F_k$ 的选择矛盾.

为了证明 U_n 在每个 F_i 中是连通的, 我们归纳地证明: 对 $\ell = 1, \ldots, n+1$, 有

$$(\forall v \in U_{\ell-1})(\forall i \in \{1, \ldots, k\})(F_i \cap H_\ell \text{ 包含一条 } v\text{–}x^* \text{路}), \tag{3}$$

$$(\forall v \in U_\ell)(\exists j \in \{1, \ldots, k\})(F_j \cap H_\ell \text{ 包含一条 } v\text{–}x^* \text{路}). \tag{4}$$

上面两式对 $\ell = 1$ 显然成立. 为了证明 (3) 对 $\ell = m > 1$ 成立, 设 $v \in U_{m-1}$ 和 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 如上面那样给出. 由归纳假设知 (4) 对 $\ell = m - 1$ 成立, 所以对某个 j 存在一条 v–x^* 路 $Q \subseteq F_j \cap H_{m-1}$. Q 的每条边 uv 处于某个 $E_{\ell-1}$ 中 (这里 $\ell \leqslant m$), 因此 $\mathcal{P}_\ell$ 包含路 uF_iv. 把 Q 的边替换成这些路, 我们将 Q 变成 $F_i \cap H_m$ 中的 v–x^* 途径, 它包含了我们想得到的 v–x^* 路.

为了证明 (4) 对 $\ell = m > 1$ 成立, 设 $v \in U_m$ 如上面那样给出, 因为 (4) 对所有 $\ell < m$ 成立 (由归纳假设知), 所以我们可以假定 $v \in U_m \setminus U_{m-1}$, 从而存在某个 j 和 $x, y \in U_{m-1}$ 使得 v 处于路 $P = xF_jy \subseteq H_m$ 上. 由 (3) 的 $\ell = m$ 情形 (上面已证明), 存在 $F_j \cap H_m$ 中的一条 x–x^* 路 P', 那么 $vPxP'x^*$ 是 $F_j \cap H_m$ 中一个途径, 它包含了我们想得到的 v–x^* 路.

最后, 我们证明图 $F_i \cap H_n$ 都是连通的, 那么 $U = U_n$ 蕴涵着引理. 前面提到 $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n$, 所以 $H_{n+1} = H_n$. 由 (3) 的 $\ell = n + 1$ 情形, 图 $F_i \cap H_{n+1} = F_i \cap H_n$ 只有一个分支, 它包含 x^*. □

定理 2.4.1 的证明 我们对 $|G|$ 用归纳法来证明充分条件. 当 $|G| = 2$ 时, 结论显然成立. 为了进行归纳论证, 我们假设结论对 $|G|$ 较小时成立, 即对 V 的每个划分 P 存在至少 $k(|P| - 1)$ 条交叉边, 并且找到 G 的边不交支撑树. (1.5.3)

我们一开始考虑前面定义的 k 个边不交的支撑森林 $F_1,\dots,F_k$, 而且森林的总边集是极大的. 如果这些森林不都是树, 则由推论 1.5.3 有

$$\sum_{i=1}^{k}\|F_i\| < k(|G|-1).$$

另一方面, 把 V 划分为单独顶点, 由假设得 $\|G\| \geqslant k(|G|-1)$, 故存在一条边

e^* $e^* \in E \setminus E(F_1 \cup \dots \cup F_k)$.

U 由引理 2.4.3 知, 存在集合 $U \subseteq V$, 在每个 F_i 中是连通的且包含 e^* 的两个端点; 特别地, $|U| \geqslant 2$. 因为经过收缩后的多重图 G/U 的每个划分导出 G 的具有相同交叉边[3]的划分, 所以对它的顶点集的任意划分 P, G/U 有至少 $k(|P|-1)$ 条交叉边. 由归纳假设, 因此 G/U 有 k 棵边不交的支撑树 $T_1,\dots,T_k$. 把每个 T_i 中由 U 收缩而成的顶点 v_U 替换成 $G[U]$ 中的支撑树 $F_i[U]$, 我们得到 G 中 k 棵边不交的支撑树. □

划分 若子图 $G_1,\dots,G_k$ 的边集构成 $E(G)$ 的划分, 则称 $G_1,\dots,G_k$ **划分** (graph partition) 图 G. 因此支撑树问题可以重新叙述如下: 一个给定的图可划分成多少个连通的支撑子图呢? 把简单的树问题重述为更复杂的形式的理由是, 它有一个明显的对偶问题 (参见定理 1.5.1): 给定图可以最少划分为多少个无圈支撑子图呢? 或者说, 对于给定 k, 哪些图可以划分为至多 k 个森林呢?

一个明显的必要条件是, 每个集合 $U \subseteq V(G)$, 可导出至多 $k(|U|-1)$ 条边, 其中每个森林不超过 $|U|-1$ 条边. 再一次, 这个条件也是充分的. 令人惊奇的是, 我们用来证明边不交支撑树定理的引理 2.4.3 也可以用来证明这个结论.

定理 2.4.4 (Nash-Williams, 1964)　一个多重图 $G=(V,E)$ 可以划分为至多 k 个森林, 当且仅当对任意非空集合 $U \subseteq V$, 有 $\|G[U]\| \leqslant k(|U|-1)$.

证明　上面已经证明了必要条件. 反之, 我们证明任意一族具有极大总边集的边不交的支撑森林 $F_1,\dots,F_k$ 划分了 G; 否则, 设 $e \in E \setminus E(F_1 \cup \dots \cup F_k)$. 由引理 2.4.3, 存在一个集合 $U \subseteq V$, 它在每个 F_i 中是连通的, 且包含 e 的两个端点. 那么 $G[U]$ 包含每个 F_i 中的 $|U|-1$ 条边, 且包含 e. 因此, $\|G[U]\| > k(|U|-1)$, 与假设矛盾. □

荫度 组成 G 的划分中森林的最小数称作图 G 的**荫度** (arboricity). 由定理 2.4.4 知, 荫度是衡量最大局部密度的一个指标: 一个图有小的荫度当且仅当它是 “无处稠密” 的, 也就是说, 当且仅当不包含具有较大 $\varepsilon(H)$ 的子图 H.

我们将在 8.5 节再次遇到定理 2.4.1, 在那里我们将证明它对无限图的形式, 它不是基于一般的支撑树 (因为那样结论不成立), 而是基于 “拓扑支撑树”: 拓

---

[3] 多重图的收缩见 1.10 节.

扑空间中由图和它的**末端** (end) 所形成的类似结构.

§2.5 路 覆 盖

让我们再次回到二部图的 König 对偶定理, 即定理 2.1.1. 如果对图 G 的每条边给一个从 A 到 B 的定向, 那么这个定理告诉我们需要多少条边不交有向路来覆盖 G 的所有顶点: 每条有向路的长度是 0 或 1, 明显地, 在这样的 “路覆盖” 中, 当路的条数最少时, 就是当它包含尽可能多长度为 1 的路时, 即当它包含最大基数的匹配时.

在这一节我们把上面的问题进行推广: 在一个给定的有向图中需要多少条有向路来覆盖它的整个顶点集? 当然, 这个问题在无向图中也可以提出. 然而, 在无向图的情况这个问题比较简单 (作为练习), 同时有向图的情形也有一个有趣的推论.

有向路 (directed path) 是一个有向图 $P \neq \emptyset$, 它的顶点 $x_0, \ldots, x_k$ 各不相同且所有边 $e_0, \ldots, e_{k-1}$ 满足 e_i 是一条由 x_i 指向 x_{i+1} 的边, 其中 $i < k$. 在这一节, 路始终指 “有向路”. 上面提到的顶点 x_k 称为路 P 的**最终顶点** (last vertex), 当 $\mathcal{P}$ 是一个路的集合时, 我们把最终顶点的集合记为 $\operatorname{ter}(\mathcal{P})$. 一个有向图 G 的**路覆盖** (path cover) 是 G 中若干不相交路的集合, 它们可以覆盖 G 中所有的顶点.

路

$\operatorname{ter}(\mathcal{P})$

路覆盖

定理 2.5.1 (Gallai & Milgram, 1960) *每个有向图 G 有一个路覆盖 $\mathcal{P}$ 和一个顶点独立集 $\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ 使得对每个 $P \in \mathcal{P}$, 有 $v_P \in P$.*

证明 显然, 图 G 总是有路覆盖, 例如那些平凡路. 我们通过对 $|G|$ 用归纳法来证明: 对于 G 的任意具有极小 $\operatorname{ter}(\mathcal{P})$ 的路覆盖 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$, 存在一个顶点集 $\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ 符合要求. 对每个 i, 记 v_i 为 P_i 的最终顶点.

$\mathcal{P}$

v_i, P_i

若 $\operatorname{ter}(\mathcal{P}) = \{v_1, \ldots, v_m\}$ 是独立的, 则无须再证, 因此不妨假设 G 有一条从 v_2 到 v_1 的边. 因为 $P_2 v_2 v_1$ 也是一条路, 由 $\operatorname{ter}(\mathcal{P})$ 的极小性知 v_1 不是 P_1 中唯一的顶点; 设 v 是 P_1 中先于 v_1 的顶点, 那么 $\mathcal{P}' := \{P_1 v, P_2, \ldots, P_m\}$ 是 $G' := G - v_1$ 的路覆盖 (图 2.5.1). 显然, 任意在 G' 中代表 $\mathcal{P}'$ 的独立集对 G 中的 $\mathcal{P}$ 也成立, 所以我们需要确定的是, 是否可以对 $\mathcal{P}'$ 使用归纳假设. 因此只需证明 $\operatorname{ter}(\mathcal{P}') = \{v, v_2, \ldots, v_m\}$ 在 G' 的所有路覆盖的最终顶点集合中是极小的.

v, $\mathcal{P}'$

G'

假设 G' 有路覆盖 $\mathcal{P}''$ 且 $\operatorname{ter}(\mathcal{P}'') \subsetneqq \operatorname{ter}(\mathcal{P}')$. 如果一条路 $P \in \mathcal{P}''$ 结束于 v, 我们可以把 $\mathcal{P}''$ 中的 P 用 Pvv_1 来代替, 从而得到 G 的一个路覆盖, 它的最终顶点集是 $\operatorname{ter}(P)$ 的真子集, 这与 $\mathcal{P}$ 的选取矛盾. 如果一条路 $P \in \mathcal{P}''$ 结束于 v_2 (同时不存在路结束于 v), 我们类似地把 $\mathcal{P}''$ 中的 P 由 Pv_2v_1 代替, 从而与

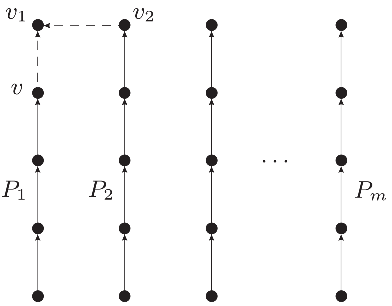

图 2.5.1　G 和 G' 的路覆盖

$\mathrm{ter}(P)$ 的极小性矛盾. 因此 $\mathrm{ter}(\mathcal{P}'') \subseteq \{v_3, \ldots, v_m\}$, 但此时 $\mathcal{P}''$ 和平凡路 $\{v_1\}$ 一起构成 G 的路覆盖, 与 $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$ 的极小性矛盾. □

作为定理 2.5.1 的推论, 我们得到偏序集理论中的一个经典结果. 前面提到过, 在偏序集 $(P, \leqslant)$ 中, 如果一个子集的元素是两两可比较的, 那么它是一个**链** (chain); 如果它的元素是两两不可比较的, 称它为一个**反链** (antichain).

链

反链

推论 2.5.2 (Dilworth, 1950)　*在每个有限偏序集 $(P, \leqslant)$ 中, 并集为 P 的最少链数等于 P 中反链的最大个数.*

证明　若 A 是 P 中基数最大的反链, 则显然 P 不能被少于 $|A|$ 条链覆盖. 反过来, 把定理 2.5.1 应用到顶点集为 P 的有向图上, 这里边集为 $\{(x, y) \mid x < y\}$, 则 $|A|$ 条链是足够的. □

练　　习

1. 设 M 是二部图 G 的一个匹配, 证明: 若 M 是次最优的 (即比 G 的某个匹配包含较少边数), 则 G 包含一条关于 M 的增广路. 这一结论是否可以推广到非二部图的匹配上?

2. 描述一个尽可能有效的算法, 在二部图中寻找一个具有最大基数的匹配.

3. 证明: 若在两个无限集合 A 和 B 之间存在两个单射 $A \to B$ 和 $B \to A$, 则存在一个双射 $A \to B$.

4.$^+$ 两个人玩一个游戏: 在某个固定的图 G 中, 他们交替地构造一条路. 如果 $v_1 \ldots v_n$ 是到目前为止已经构造的路, 下一个游戏者就要找到一个顶点 v_{n+1} 使得 $v_1 \ldots v_{n+1}$ 还是一条路, 不能进一步延长这条路的游戏者就输掉了这局游戏. 对什么图 G, 第一个游戏者有一个必胜策略; 对什么图, 第二个游戏者必胜呢?

5. 从 König 定理推导婚姻定理.

6. 设 G 和 H 是如 Hall 定理的第三个证明中所定义的图. 证明: 对每个 $b \in B$, 总有 $d_H(b) \leqslant 1$, 并推导出婚姻定理.

7.$^+$ 在无限图中寻找一个婚姻定理的反例.

8. 设 k 是一个整数. 证明: 有限集分成若干 k-子集的任意两个划分包含一个公共代表系.

9. 设 $A_1, \ldots, A_n$ 是有限集 A 的子集, 而 $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$. 证明: 对所有 $k \leqslant n$, 存在满足 $|D_k| = d_k$ 的不交子集 $D_k \subseteq A_k$ 当且仅当对所有 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 有

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geqslant \sum_{i \in I} d_i .$$

10.$^+$ 证明 Sperner 引理: 在 n 个元素的集合 X 中, 不可能存在多于 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集使得其中任何一个不包含另一个.

(提示: 构造 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 条链来覆盖 X 的幂集格.)

11.$^+$ 设 G 是一个具有二部划分 $\{A, B\}$ 的二部图. 假定 $\delta(G) \geqslant 1$, 且对每一个满足 $a \in A$ 的边 ab 有 $d(a) \geqslant d(b)$, 证明 G 包含一个饱和 A 的匹配.

12.$^-$ 找到一个二部图以及它的一个优先集使得它没有最大匹配是稳定的, 同时没有稳定匹配是最大的. 找到一个非二部图以及它的一个优先集使得这个图没有稳定匹配.

13.$^-$ 考虑稳定婚姻定理的证明中所描述的算法. 注意到, 一旦 B 中的一个顶点被匹配, 以后它始终被匹配而且随着它的匹配边的变化而变得更幸福. 另一方面, 证明: 对于 A 的一个给定顶点, 随着每一步变化 (除了它不被匹配的阶段外), 与它关联的匹配边的序列会变得更不幸福.

14. 证明: 一个给定图的所有稳定匹配覆盖相同的顶点集 (特别地, 它们的大小都相等).

15.$^+$ 证明: 下面这个 “明显的” 算法并不一定给出二部图的稳定匹配. 从任意匹配开始, 若当前的匹配不是极大的, 则增加一条边; 如果它是极大的但不是稳定的, 则把产生不稳定性的边加进去, 同时删去当前任何与它的端点匹配的边.

16. 当 G 是森林时, 找出定理 2.2.3 中的 S.

17. 一个图 G 叫做 (顶点) **传递的** (transitive), 如果对任意两个顶点 $v, w \in G$ 存在 G 的一个自同构把 v 映射到 w. 利用定理 2.2.3 之后的讨论, 证明每一个偶数阶的传递连通图包含 1-因子.

18. 证明: 图 G 包含 k 条独立边当且仅当对所有集合 $S \subseteq V(G)$ 有 $q(G - S) \leqslant |S| + |G| - 2k$.

19.$^-$ 构造不包含 1-因子的立方图.

20.$^+$ 从 Tutte 定理推出婚姻定理.

21.$^-$ 否定 König 定理 (2.1.1) 在非二部图中的类似命题, 但是证明 $\mathcal{H} = \{K^2\}$ 有 Erdős-Pósa 性质.

22. 对于立方图, 引理 2.3.1 比 Erdős-Pósa 定理要强很多. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 通过找到一个函数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得每一个最小度 $\geqslant 3$ 且阶至少为 $g(k)$ 的多重图都包含 k 个不交的圈, 从而把引理 2.3.1 推广到最小度 $\geqslant 3$ 的任意多重图上; 或者证明这样的函数 g 根本不存在.

23. 给定图 G, 令 $\alpha(G)$ 表示 G 中独立顶点集的最大阶数. 证明: G 的顶点可以被最多 $\alpha(G)$ 个不交的子图覆盖, 其中每个子图同构于一个圈或 K^2 或 K^1.

24. 证明: 如果 G 有两个边不交的支撑树, 那么它就有一个连通的支撑子图使得所有顶点的度为偶数.

25. 从下面定理 2.4.1 的简单 "证明" 中找出错误. 如果一个划分至少有两个部分并且至少一个类包含多于一个元素, 则称这个划分是**非平凡的**. 我们对 $|V| + |E|$ 用归纳法来证明, 如果 V 的每个具有 r 个部分的非平凡划分都有至少 $k(r-1)$ 条交叉边, 那么 $G = (V, E)$ 包含 k 个边不交的支撑树. 如果我们允许 k 个 K^1 的拷贝作为 K^1 的一族 k 个边不交的支撑树, 那么归纳法对于 $G = K^1$ 平凡地成立. 下面考虑归纳步骤: 如果 V 的每个具有 r 个部分的非平凡划分有多于 $k(r-1)$ 条交叉边, 则删除 G 的一条边, 根据归纳法结论得证. 因此 V 有一个非平凡划分 $\{V_1, \ldots, V_r\}$ 恰好有 $k(r-1)$ 条交叉边. 假定 $|V_1| \geqslant 2$, 如果 $G' := G[V_1]$ 有 k 个不交的支撑树, 把这些树和 G/V_1 中存在的 k 个不交的支撑树 (存在性由归纳法保证) 结合起来即可. 所以我们可以假设 G' 中没有 k 个不交的支撑树, 那么由归纳法知它有一个非平凡的顶点划分 $\{V'_1, \ldots, V'_s\}$ 拥有少于 $k(s-1)$ 条交叉边, 因此 $\{V'_1, \ldots, V'_s, V_2, \ldots, V_r\}$ 是一个具有 $r+s-1$ 个部分的非平凡划分且拥有少于 $k(r-1) + k(s-1) = k((r+s-1)-1)$ 条交叉边, 矛盾.

26. 图 G 称为**平衡的** (balanced), 如果对每一个子图 $H \subseteq G$ 有 $\varepsilon(H) \leqslant \varepsilon(G)$.
    (i) 找到几类自然的平衡图.
    (ii) 证明: 平均度是平衡图荫度的上界. 那么 ε 或者 $\varepsilon + 1$ 是否是荫度的上界呢?
    (iii) 用平衡图或其他图来刻画图族 G: 对每一个导出子图 $H \subseteq G$ 均有 $\varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$.

27. 把 König 定理和 Dilworth 定理重新叙述成为纯粹的存在形式, 而不使用不等式.

28.$^-$ 不使用对应的有向形式, 直接证明 Gallai-Milgram 定理的无向形式.

29. 由 Gallai-Milgram 定理推出婚姻定理.

30.$^-$ 证明: 至少有 $rs+1$ 个元素的偏序集要么包含长度为 $r+1$ 的链, 要么包含阶为 $s+1$ 的反链.

31. 证明下面 Dilworth 定理的对偶形式: 在每个有限偏序集 $(P, \leqslant)$ 中, 并集为 P 的反链的最小个数等于 P 中最长链的长度.

32. 从 Dilworth 定理推出 König 定理.

33. 找到一个偏序集满足它既没有无限的反链也不是有限多个链的并.

注　解

有一本非常容易阅读且容易理解的关于有限图匹配的专著: L. Lovász & M. D. Plummer, *Matching Theory*, Annals of Discrete Math. 29, North Holland 1986. 另一个综合性的专著是 A. Schrijver, *Combinatorial optimization*, Springer 2003. 这一章介绍的结果的参考资料都可以在这两本书中找到.

如同我们在第三章将要看到的, König 定理 (1931) 不过是更广义的 Menger 定理 (1927) 的二部图情形. 那时候, 虽然 Hall 定理的证明出现得更晚 (1935), 但是这两个定理都没有 Hall 的婚姻定理更有名. 直到今天, Hall 定理仍然是图论中应用最广泛的结果之一. 前两个证明是传统方法; 第三个证明中运用的边极小子图的方法, 可以追溯到 Rado (1967) 的文章, 我们这里的版本以及它的对偶 (练习 6) 来自于 Kriesell.

关于稳定婚姻定理的背景和应用, 参见 D. Gusfield & R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press 1989; 也可参考 A. Tamura, Transformation from arbitrary matchings to stable matchings, *J. Comb. Theory A* 62 (1993), 310–323.

Tutte 1-因子定理的证明是基于 Lovász 1975 年的证明. Tutte 定理的推广 (即定理 2.2.3) 以及它之后的非正式讨论是匹配完全结构定理的简化形式, 它由 Gallai (1964) 和 Edmonds (1965) 独立完成, 关于这个定理的详细阐述和讨论, 参见 Lovász & Plummer 的专著.

定理 2.3.2 来自于 P. Erdős & L. Pósa, On independent circuits contained in a graph, *Canad. J. Math.* 17 (1965), 347–352. 它的证明引自于 M. Simonovits, A new proof and generalization of a theorem of Erdős and Pósa on graphs without $k+1$ independent circuits, *Acta Sci. Hungar* 18 (1967), 191–206. 在引理 2.3.1 的证明中, 用一个不变量来限制另外一个不变量所涉及的计算是常见的证明技巧, 本书中没有强调图论的这个方向, 但它也是比较典型的方法.

对于 (具有有向圈的) 有向图, 也存在一个和 Erdős-Pósa 定理十分相似的结论, 它曾经是很长时间未解的猜想, 最近才由 B. Reed, N. Robertson, P. D. Seymour 和 R. Thomas 证明: Packing directed circuits, *Combinatorica* 16 (1996), 535–554. 它的证明比无向的情形要困难很多; 参见 12.4 节, 特别是推论 12.4.10, 它可以反映出这个技巧的侧面.

定理 2.4.1 由 Nash-Williams 和 Tutte 独立证明, 这两篇论文都收录在 *J. London Math. Soc.* 36 (1961) 中. 定理 2.4.4 出自 C. St. J. A. Nash-Williams, Decompositions of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.* 39 (1964), 12. 这两个结果都可以很好地用拟阵的语言来表述和证明, 参见 Schrijver 的专著.

类似于推论 2.4.2, 我们可以问多大的顶点连通性可以保证 k 棵以一个给定顶点 r 为根的支撑树 $T_1, \ldots, T_k$ 的存在性, 同时满足对每个顶点 v, k 条路 vT_ir 是独立的. 例如, 如果 G 是一个圈, 那么去掉 r 的左边或右边的边得到两棵这样的支撑树. 在 A. Itai and A. Zehavi, Three tree-paths, *J. Graph Theory* 13 (1989), 175–187 中, 他们猜想 $\kappa \geqslant k$ 是充分的. 这个猜想在 $k \leqslant 4$ 时已经得到证明; 参见 S. Curran, O. Lee & X. Yu, Chain decompositions and independent trees in 4-connected graphs, *Proc. 14th Ann. ACM SIAM symposium on discrete algorithms* (Baltimore 2003), 186–191.

定理 2.5.1 出自于 T. Gallai & A.N. Milgram, Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) 21 (1960), 181–186.